



Facultad  
de  
Ciencias

# Problema del Cuadrado Inscrito

(Square Peg Problem)

Trabajo de Fin de Grado  
Para acceder al  
GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Adrián Cuesta Torres  
Director: Fernando Etayo Gordejuela

Octubre - 2020



## Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer a mi director, Fernando Etayo, su disposición y ayuda constante como director de este trabajo, así como su paciencia y consideración a lo largo del mismo, pues resulta de gran ayuda y alivio encontrar a alguien que se adapte al ritmo del alumno y a sus necesidades.

Quiero agradecer también a mi familia su constante apoyo moral y económico a lo largo de estos años, así como su paciencia ante las dificultades encontradas y mis no pocos errores cometidos a lo largo de esta etapa. Aquí debo realizar una especial mención a mi abuelo Domingo, quien por desgracia no pudo verme acabar la carrera pero al que debo mucho de lo que ahora soy y a quien tengo siempre presente.

Es necesario mencionar también a todas las personas maravillosas que he conocido a lo largo de esta carrera, muchos de ellos fundamentales tanto por su apoyo moral como académico y con los que me une ya un vínculo de por vida. No entraré en menciones particulares, confiando en que aquellos a los que me refero se den por aludidos. Vosotros habeis hecho de esta carrera algo mucho más ameno y divertido por momentos, siendo mi soporte en mis momentos bajos y mi compañía en los altos.



## Resumen

Existen numerosos problemas abiertos en el campo de las matemáticas. Las preguntas cotidianas que se hacen los matemáticos llevan a crear nuevos problemas cada día; su trabajo también hace que muchos encuentren solución. Algunos de ellos pasan solo un par de horas sin resolverse, mientras que los más famosos aguantan siglos. Algunos ejemplos son el Último Teorema de Fermat o la conjetura de Catalan.

Este trabajo de fin de grado se centra en el estudio del Problema del Cuadrado Inscrito, una conjetura matemática enunciada en 1911 por Otto Toeplitz. El problema cuestiona si es posible inscribir un cuadrado en toda curva cerrada simple en el plano.

Hasta la fecha no ha sido posible afirmar el enunciado en su generalidad, pero sí se han encontrado soluciones parciales, variando las condiciones de la curva. Algunas de ellas, las más importantes, serán detalladas en este trabajo, empleándose para ello argumentos geométricos y/o topológicos.

Esta conjetura también sugirió otros problemas asociados donde los polígonos a inscribir son otros, como es el caso del Problema del Rectángulo Inscrito o la inscripción de triángulos semejantes a uno dado.

**Palabras clave:** curva de Jordan, cuadrado inscrito, símplice.

## Abstract

There exist a lot of open problems in mathematics. The daily questions that mathematicians ask themselves lead to creating new problems every day; their work also causes some to find their solution. Not all open problems are made equal: some spend only a couple of hours without solution while the most famous endure centuries. Some examples are the Fermat's Last Theorem or the Catalan's Conjecture.

This final degree paper focuses on the study of the Inscribed Square Problem, a mathematical conjecture enunciated in 1911 by Otto Toeplitz. The problem asks whether it is possible to inscribe a square in any single closed curve in the plane.

So far, it has not been possible to affirm the statement in its generality, but partial solutions have been found, varying the conditions of the curve. Some of them, the most important, will be detailed in this work, using geometric or topological arguments.

This conjecture also suggested other associated problems where the polygons to be inscribed are others, such as the Inscribed Rectangle Problem or the inscription of triangles similar to a given one.

**Keywords:** Jordan's curve, inscribed square, simplex.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción al problema y contexto histórico . . . . .	1
1.2. Descripción de la memoria . . . . .	3
<b>2. Trabajo de Arnold Emch</b>	<b>5</b>
2.1. Resultados previos de utilidad . . . . .	5
2.2. Prueba del teorema de Emch . . . . .	9
<b>3. Prueba de Lev Schirelmann</b>	<b>11</b>
<b>4. Trabajo de Walter Stromquist</b>	<b>13</b>
4.1. Conceptos previos . . . . .	13
4.1.1. Introducción a la homología simplicial . . . . .	13
4.1.2. Símplices y aplicaciones continuas: Homología singular . . . . .	18
4.1.3. Relación entre homologías . . . . .	20
4.2. Cuadrado inscrito en curvas suaves . . . . .	20
4.3. Curvas localmente monótonas . . . . .	29
<b>5. Otras condiciones sobre la curva</b>	<b>35</b>
5.1. Simetría respecto del origen . . . . .	35
5.2. Simetría axial . . . . .	37
<b>6. Problemas asociados: inscripción de otros polígonos</b>	<b>39</b>
6.1. Problema del Rectángulo Inscrito . . . . .	39
6.2. Inscripción de triángulos en curvas de Jordan . . . . .	42





# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Introducción al problema y contexto histórico

El centenario Problema del Cuadrado Inscrito tuvo su génesis en el año 1911 a través de Otto Toeplitz (de ahí que también se conozca como Conjetura de Toeplitz). Este reputado matemático alemán impartió en dicho año una conferencia, cuya segunda parte, que titulaba *On some problems in topology*, contenía una serie de problemas entre los que se formulaba la pregunta

“¿Es posible inscribir un cuadrado en toda curva de Jordan?”

Formulada la cuestión, es razonable y conveniente aclarar dos conceptos:

- Una curva de Jordan es una curva cerrada y simple en  $\mathbb{R}^2$ . Esto es, la imagen de una aplicación inyectiva de la circunferencia unidad en el plano. Una curva de Jordan divide al plano en dos componentes conexas tales que la curva es la frontera de ambas, como se enuncia en el **Teorema de la curva de Jordan**.
- Un cuadrado está inscrito en una curva  $J$  si los cuatro vértices que lo componen están sobre la curva, pudiendo estar los lados tanto dentro como fuera de la curva (o incluso sobre ella).

Ilustramos en la siguiente figura un ejemplo de cuadrado inscrito en una curva de Jordan:

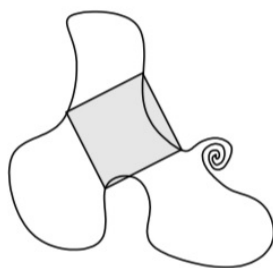


Figura 1.1: Cuadrado inscrito en una curva de Jordan.

Toeplitz afirmó que sólo le fue posible probarlo para el caso de curvas convexas, aunque nunca se le ha atribuido ninguna demostración, suponiéndose por tanto que jamás la llegó a publicar.

No fue hasta 1913, cuando se publicó la primera prueba asociada a la Conjetura de Toeplitz. El autor de la misma fue Arnold Emch, quien respondió afirmativamente a la pregunta para el caso de curvas “suficientemente suaves”, lo que en ese caso equivalía a curvas convexas, u óvalos. Dos años después, en 1915, publicó un segundo escrito que iba un paso más allá, dando una nueva condición de regularidad para la curva, y, por último, publicó en 1916 una demostración para curvas  $C^1$  a trozos, las cuales debían presentar un número finito de puntos de inflexión y otras singularidades.

Como curiosidad, cabe mencionar que Emch no estaba al corriente de la introducción al problema por parte de Toeplitz, pues el conoció el enunciado a través de Aubrey J. Kempner, tal y como sostenía la segunda de sus publicaciones. A pesar de esto, toda la comunidad matemática atribuye a Toeplitz la autoría de la conjetura.

El **Teorema de la Mesa**, establecido y probado por Roger Fenn en 1970 y publicado en el *Bulletin of the London Mathematical Society*, da como corolario otra prueba muy interesante para la conjetura en curvas convexas. Este teorema afirma que cualquier función “suficientemente buena”  $f$  de un conjunto convexo  $U \subset \mathbb{R}^2$  da lugar a un cuadrado de longitud dada, definido como cuatro puntos de  $U$  sobre los que  $f$  toma el mismo valor. Viendo el grafo de  $f$  como una colina, puede interpretarse como el reglejo sobre el suelo de una tabla cuadrada, de ahí el nombre. La curva  $J$  (en nuestro problema) es una región estrellada, por lo que aplicando el **Teorema de la Mesa** sobre  $J$  obtenemos el cuadrado que se busca.

No se conocen más resultados al respecto hasta 1929, cuando Lev Schnirelmann fue un paso más allá, publicando una prueba para curvas dos veces derivables y con segunda derivada continua. Esta prueba fue mejorada en una versión extendida publicada de forma póstuma en 1944 (se desconoce la fecha real de la misma).

Sobre este último, Guggenheimer publicó en 1965 un escrito donde mencionaba una serie de errores cometidos por Schnirelmann, y aseguraba corregirlo. Sin embargo, el argumento empleado por Guggenheimer fue fácilmente rebatido por una serie de contraejemplos.

Cabe mencionar también que en 1950 Oglivly publicó una supuesta prueba para la conjetura sin restricción alguna sobre las condiciones de la curva, la cual fue probada como falsa unos meses después de su publicación, al encontrar tres grandes “agujeros” en la demostración.

En 1961, Jerrard retomó el problema y lo probó para curvas analíticas, que son aquellas cuyas funciones coordenadas son reales y analíticas. Su trabajo fue motivado por el teorema de Kakutani, que indica que todo cuerpo convexo admite un cubo circunscrito. Su afirmación fue la continuación de una serie de resultados previos, y a su vez fue ampliada posteriormente por autores como Dyson y Floyd.

Uno de los resultados más fuertes e importantes de la conjetura fue publicado por Walter Stromquist en 1989, quien probó como cierto el supuesto para cualquier curva suave, y, yendo un paso más allá, para curvas localmente monótonas.

Cabe destacar la aportación histórica a la conjetura de trabajos como el de Hebbert, donde la curva en cuestión es un cuadrilátero, el de Nielsen para curvas simétricas respecto a un punto o una recta, o el de Makeev para curvas  $C^2$  con forma estrellada.

Mencionamos también pruebas más recientes requeridas de potentes computadoras, como la llevada a cabo en 2013 por Petterson, Tverberg y Östergard, quienes probaron la existencia del cuadrado inscrito acotando su longitud de lado.

Los resultados más recientes relativos al problema son obra del australiano Terence Tao, y están recogidos en su publicación *An integration approach to the Toeplitz Square Peg Problem*, que data de 2017, donde cambió el enfoque previo: de sólo centrarse en la paridad de intersecciones geométricas asociadas a la curva, se pasó a aproximarse a la resolución del mismo mediante integrales definidas sobre la curva.

En la actualidad, a pesar de todas las pruebas particulares con condiciones sobre la curva restringidas, nadie ha dado con el método que permita resolver el problema en su generalidad más de cien años después de enunciarse el mismo.

Uno puede tratar de aprovechar las pruebas parciales encontradas para resolver el problema principal mediante un “argumento límite”. Por ejemplo, reduciendo el problema al caso de curvas suaves aproximando la curva  $\gamma$  en cuestión mediante una sucesión  $\{\gamma_n\}$  de curvas suaves, tales que cada una admita un cuadrado inscrito  $\{Q_n\}$  y, por compacidad, exista una subsucesión  $(Q_{n_k})_k$  de cuadrados convergente al cuadrado inscrito en  $\gamma$ .

Sin embargo, tal límite puede ser un cuadrilátero degenerado (es decir, unipuntual), lo que invalida el argumento. Hasta la fecha no se ha conseguido evitar este supuesto. [1] [2] [3]

## 1.2. Descripción de la memoria

En este trabajo se pretende introducir el más que interesante Problema del Cuadrado Inscrito, cuya simplicidad de enunciado no le exime de gran complejidad resolutoria, hasta el punto de no haberse conseguido afirmar hasta la fecha, como hemos mencionado. Mostraremos los resultados parciales más relevantes encontrados para el mismo, así como la resolución de problemas similares surgidos, donde se varía el polígono a inscribir.

En el Capítulo 2, mostraremos el trabajo realizado por Arnold Emch, quien consiguió demostrar la conjetura para el caso de que la curva sea convexa. Este capítulo se divide en dos secciones:

En la Sección 2.1, introduciremos una serie de resultados probados por Emch que fundamentan la resolución posterior, expuesta en la Sección 2.2 a través del **Teorema 2.10**.

En el Capítulo 3 se muestra la idea de la demostración que empleó Schirleermann para curvas en las que pueda definirse una curvatura continua a trozos. El argumento demostrativo resulta de gran interés, aunque no hayamos podido acceder a la publicación de Schirleermann, por lo que conviene anunciar que la prueba no está completada en el trabajo.

El Capítulo 4, el de mayor contenido de este trabajo, muestra en detalle el trabajo realizado por W. Stromquist en relación a la conjetura. Aquí, resulta necesario introducir una serie de nociones previas, las cuales se recogen en la Sección 4.1, a su vez dividida en tres subsecciones, que contienen respectivamente conceptos de homología simplicial, homología singular, así como la relación existente entre ambas.

En la Sección 4.2 se muestra la prueba de Stromquist para el caso de que la curva sea suave, definiéndose el concepto de suavidad y construyéndose la demostración a partir de un simplex determinado, aplicando lo expuesto en la sección anterior, culminando con la prueba del **Teorema 4.44**.

Por último, en la Sección 4.3, se amplía el **Teorema 4.42** dándole una nueva condición, llamada **Condición A** en base al artículo del propio Stromquist. Posteriormente, se detalla el concepto

de curva localmente monótona y se prueba la existencia de cuadrado inscrito en cualquier curva de este tipo, como enuncia el **Teorema 4.52**.

Complementariamente, en el Capítulo 5 exponemos dos resultados muy interesantes sobre la conjetura restringida a las curvas simétricas, dividiéndose este en dos secciones vinculadas cada una a un tipo de simetría: simetrías respecto a un punto (Sección 5.1) y simetrías axiales (Sección 5.2).

Por último, en el Capítulo 6 mostramos dos de los resultados más importante relativos al Problema del Cuadrado Inscrito, dónde se varían los polígonos a inscribir. Por un lado, en la Sección 6.1 mostramos en detalle la prueba del Problema del Rectángulo Inscrito mostrada por Vaughan, un derivado de nuestra conjetura. Después, en la Sección 6.2 introducimos la prueba general para la inscripción de triángulos semejantes a cualquier triángulo  $T$  que consideremos, aclarando además la “generalidad” en la posición de tales triángulos dentro de la curva.

## Capítulo 2

# Trabajo de Arnold Emch

Como se ha relatado en la introducción, en 1913, Arnold Emch puso la primera piedra en la resolución de problemas secundarios generados a raíz de la Conjetura de Toeplitz, formulando la siguiente cuestión : ¿Es posible encontrar al menos un cuadrado inscrito en toda curva de Jordan convexa? En este capítulo expondremos los resultados enunciados por Emch, desde una serie de resultados previos requeridos para los razonamientos empleados, hasta la prueba del teorema final. [4] [5]

### 2.1. Resultados previos de utilidad

En este apartado se plantearán una serie de definiciones y resultados para contextualizar el razonamiento de Emch, que sirven como soporte para la prueba que se realizará posteriormente.

**Definición 2.1** Se define un **dominio convexo**  $S$  como aquel conjunto de puntos del plano que verifica:

- $\forall x, y \in S, xy \in S$ . Es decir, para dos puntos cualquiera del dominio, el segmento que los une está también contenido en el dominio.
- $S$  es acotado.
- $S$  es cerrado.

Emch acortó el nombre de **curva de Jordan convexa** a **óvalo**, por simplicidad. Todo óvalo  $S$  encierra un dominio convexo de puntos como se ha definido (aunque también se puede considerar el óvalo como el propio dominio convexo con la curva como borde) y se parametriza del siguiente modo:

$$\begin{aligned}x &= \phi(t) \\ y &= \psi(t)\end{aligned}$$

donde  $\phi$  y  $\psi$  son funciones reales de una variable real, continuas y periódicas, siendo ambas de periodo  $\omega$ .

Emch estableció una serie de condiciones sobre las funciones que definen los puntos de su óvalo:

1. Las derivadas  $\phi'(t)$  y  $\psi'(t)$  son también funciones periódicas, ambas del mismo periodo  $\omega$ . Además, se suponen continuas  $\forall t \in [0, \omega]$ .

2.  $\phi'(t)$  y  $\psi'(t)$  no pueden anularse simultáneamente para ningún valor dentro del intervalo establecido. Es decir,  $(\phi'(t), \psi'(t)) \neq (0, 0), \forall t \in [0, \omega]$ . Para garantizar el cumplimiento de esta condición, se eliminan de la definición de óvalo los puntos singulares donde las derivadas de ambas funciones se anulan simultáneamente, o equivalentemente, se excluyen “trozos rectos” del óvalo, donde las funciones  $\phi$  y  $\psi$  toman valores constantes o dependen linealmente de  $t$ .

3. Sobre cada punto  $(x, y)$  del óvalo puede, por tanto, definirse una recta tangente, cuya dirección varía de forma continua al desplazar también de modo continuo el punto de tangencia.

4. Se asume también que  $\phi(t), \psi(t), \phi'(t), \psi'(t) \neq 0$  para los valores  $t=0$  y  $t=\omega$ .

5. Por último, se exige que  $\phi(0) = \phi(\omega), \psi(0) = \psi(\omega), \phi'(0) = \phi'(\omega)$  y  $\psi'(0) = \psi'(\omega)$ .

Una vez expuestas las condiciones que todo óvalo tenía que cumplir para Emch, procedemos a enunciar y probar una serie de teoremas fundamentales para el desarrollo de su trabajo.

**Teorema 2.2** Si las funciones  $\phi(t), \psi(t)$  tienen alguna raíz real en el intervalo  $[0, \omega]$ , el número de raíces que tienen es siempre par. Por otro lado, las funciones  $\phi'(t)$  y  $\psi'(t)$  siempre tienen un número par de raíces reales en el intervalo  $[0, \omega]$ .

*Demostración:*

Para la primera parte del teorema, recordamos la condición impuesta de que  $\phi(0) = \phi(\omega) \neq 0$ . Suponemos que  $\phi(0) > 0$  y que  $\exists r_1 \in (0, \omega) : \phi(r_1) = 0$ . Por tanto,  $\exists s \in (r_1, \omega) : \phi(s) < 0$ , y basta aplicar el **Teorema de Bolzano** para deducir que existe otra raíz  $r_2$  en el intervalo  $(s, \omega)$ . Siendo análogo para la función  $\psi(t)$ , se deduce que por cada raíz existente aparece otra, por lo que su número es siempre par.

La segunda parte se demuestra aplicando el **Teorema de Rolle**. Como  $\phi(0) = \phi(\omega)$ , y dando por hecho que  $[\phi]$  es continua en  $[0, \omega]$  y derivable en  $(0, \omega)$ , ha de existir un  $c_1 \in (0, \omega) : \phi'(c_1) = 0$ . Por lo visto antes, se deduce de aquí la existencia de otra raíz  $c_2$ , por lo que el número de raíces siempre será par.  $\square$

**Teorema 2.3** Para cualquier dirección  $\lambda$  dada, existen al menos dos rectas tangentes al óvalo paralelas a tal dirección.

*Demostración:*

Consideramos una recta en el mismo plano que el óvalo, de pendiente  $\lambda$ . Queremos que  $\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)} = \lambda$ , condición que nos lleva a la ecuación  $\psi'(t) - \lambda\phi'(t) = 0$ .

Vemos que  $\psi'(t) - \lambda\phi'(t)$  es la derivada de  $\psi(t) - \lambda\phi(t)$ , la cual es una función periódica por ser combinación lineal de funciones periódicas, y además verifica las condiciones impuestas para  $\phi$  y  $\psi$ , por lo que su derivada también las cumple.

De esta forma, tenemos que la función  $\psi'(t) - \lambda\phi'(t)$  tiene como mínimo dos raíces reales, o lo que es lo mismo, la ecuación  $\psi'(t) - \lambda\phi'(t) = 0$  tiene al menos dos soluciones reales.

Con esto queda probado que existen al menos dos valores de  $t$  entre 0 y  $\omega$  para los que la recta tangente al óvalo es paralela a toda recta de pendiente  $\lambda$ .  $\square$

Habiéndose probado la existencia de al menos dos rectas paralelas a cualquier dirección dada, probaremos ahora que sólo hay exactamente dos para cada caso. Previamente daremos la

siguiente definición, previamente introducida por Minkosvky.

**Definición 2.4** Por cada punto  $(x,y)$  del borde del óvalo pasa al menos una recta que cumple que todos los puntos del dominio convexo que no pertenecen a la recta están sólo a un lado de la misma. Obviamente, tales rectas son las tangentes al óvalo. Dicha recta se denomina **recta de soporte del punto  $(x,y)$** .

**Teorema 2.5** Para cualquier dirección dada, existen dos y solo dos rectas tangentes al óvalo paralelas a esa dirección.

*Demostración:*

La existencia de al menos dos rectas paralelas a la recta de pendiente  $\lambda$  dada queda probada en virtud del **Teorema 2.3**. Queda probar que tal número de rectas es únicamente dos:

Supongamos por reducción al absurdo que dada una dirección cualquiera  $\lambda$ , existen tres rectas tangentes al óvalo de pendiente  $\lambda$ , que denominamos  $t_1, t_2$  y  $t_3$ . Supongamos que  $t_2$  está entre  $t_1$  y  $t_3$ . Tendríamos así que  $t_2$  es una recta tangente al óvalo (por tanto una recta de soporte de algún punto de su borde) que tendría puntos del dominio a ambos lados, lo que contradice la definición de recta de soporte.  $\square$

Para el siguiente teorema definiremos un nuevo concepto introducido por Emch, un tipo particular de cuadrilátero denominado **cuadrilátero cóncavo** (*reentrant quadrangle*):

**Definición 2.6** Se dice que un cuadrilátero de vértices  $A_1, A_2, A_3$  y  $A_4$  es un **cuadrilátero cóncavo** si uno de sus vértices se encuentra en el interior del triángulo formado por los otros tres.

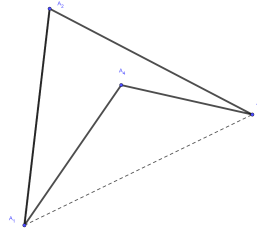


Figura 2.1: Ejemplo de cuadrilátero cóncavo.

**Teorema 2.7** No es posible inscribir un cuadrilátero cóncavo en ningún óvalo.

*Demostración:*

Suponemos, por reducción al absurdo, que en un óvalo  $S$  se encuentra inscrito un cuadrilátero cóncavo cuyos vértices siguen el orden  $A_1 A_4 A_3 A_2$ . Al estar todos los vértices sobre el dominio y por definición de dominio convexo, los segmentos  $A_3 A_4$  y  $A_1 A_2$  están contenidos en el dominio, pero todos los puntos fuera de los segmentos pero en sus prolongaciones, están fuera de  $S$ .

Sea  $A_5$  la intersección de  $A_1A_2$  con la prolongación de  $A_3A_4$ . Cómo obviamente  $A_4, A_5 \in S$ , se tiene que el segmento  $A_4A_5 \in S$ , contradiciendo lo anterior.

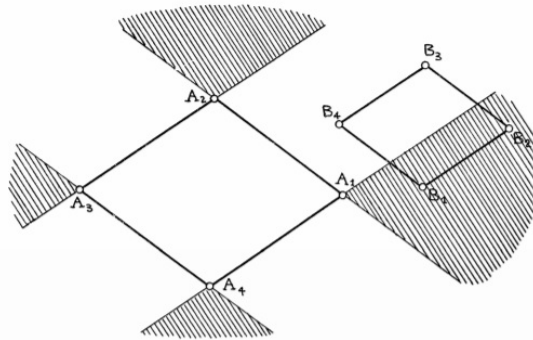
Por tanto, no es posible inscribir ningún cuadrilátero cóncavo en un óvalo.  $\square$

**Teorema 2.8** No es posible inscribir en un óvalo dos rombos diferentes con sus lados correspondientes (o diagonales) paralelos.

*Demostración:*

Considero dos rombos diferentes y de lados correspondientes paralelos, de vértices respectivos  $A_1A_2A_3A_4$  y  $B_1B_2B_3B_4$ .

Prolongando los lados del primer rombo, dividimos el óvalo en cinco regiones, como se muestra en la figura. Suponiendo que algún vértice (vease  $B_1$ ) del segundo rombo pertenece a alguna de las cuatro regiones sombreadas, siempre habrá otro vértice en la misma zona al ser los lados paralelos, por lo que siempre será posible formar un **cuadrilátero cóncavo** con  $B_1$  y tres vértices del primer rombo.



En el segundo caso, se tendría que los cuatro vértices del rombo A estarían en regiones sombreadas delimitadas por las prolongaciones de los lados del rombo B, por lo que con tres vértices de B y cualquiera de A podría formarse otro **cuadrilátero cóncavo**.

Sabiendo que ningún cuadrilátero cóncavo puede inscribirse en un óvalo, el enunciado queda probado.  $\square$

El último paso antes de pasar al principal objetivo de este apartado es la introducción de una proposición ciertamente útil en el desarrollo de la demostración posterior:

**Proposición 2.9** Sean  $a$  y  $b$  dos números reales cualesquiera. Sean  $\lambda = \phi_1(\theta)$  y  $\mu = \psi_1(\theta)$  dos funciones reales de variable real, continuas y de parámetro  $\theta$ . Supongamos que existen dos valores  $\alpha$  y  $\beta$  del parámetro para los cuales:  $\phi_1(\alpha) = \psi_1(\beta) = a$ ;  $\phi_1(\beta) = \psi_1(\alpha) = b$ ;

Entonces, existe al menos un valor del parámetro, dígame  $\theta = \lambda$ , tal que  $\phi_1(\lambda) = \psi_1(\lambda)$ .

*Demostración:*

Para probarlo basta considerar la función  $\phi_1(\theta) - \psi_1(\theta)$ , que obviamente es continua y toma al menos un valor entre  $a-b$  y  $b-a$ , valores que siempre serán de distinto signo, por lo que basta aplicar el teorema de Bolzano para ver que  $\exists \lambda : \phi_1(\lambda) - \psi_1(\lambda) = 0 \Rightarrow \phi_1(\lambda) = \psi_1(\lambda)$ .  $\square$



## 2.2. Prueba del teorema de Emch

Con todos estos resultados previos ya resulta posible profundizar en la principal cuestión a la que Emch respondió afirmativamente:

**Teorema 2.10** En todo óvalo es posible encontrar al menos un cuadrado inscrito.

*Demostración:*

En primer lugar, se considera un óvalo  $S$  sobre el plano y un punto cualquiera  $P$  fuera del óvalo. Sea  $l_\alpha$  una recta cualquiera que pasa por  $P$ , y sean  $S_\alpha$  y  $T_\alpha$  los dos puntos de tangencia del óvalo cuyas tangentes son paralelas a  $l_\alpha$ . Se define también los puntos medios de todos los segmentos contenidos en el óvalo que son paralelos a  $l_\alpha$ . Uniendo dichos puntos obtenemos una curva continua, que denotamos por  $C_\alpha$  y tiene por extremos a  $S_\alpha$  y  $T_\alpha$ .

Considero ahora la recta  $l_\beta$ , que pasa por  $P$  y es perpendicular a  $l_\alpha$ , y realizo la misma construcción que antes, obteniendo una curva continua  $C_\beta$  que va desde  $S_\beta$  a  $T_\beta$ . Como las tangentes al óvalo paralelas a  $l_\alpha$  y las paralelas a  $l_\beta$  forman un rectángulo, es obvio que las curvas  $C_\alpha$  y  $C_\beta$  intersecan en un punto interior del óvalo. De hecho, este punto, al que denominamos  $P_{\alpha\beta}$ , es único:

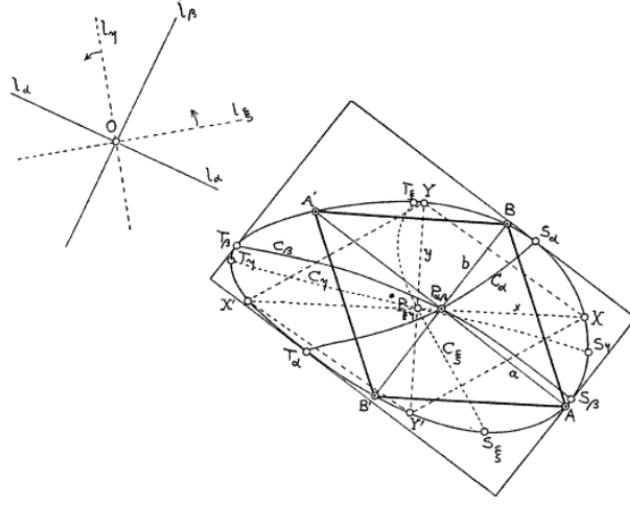
Si hubiese dos puntos de intersección  $P_{\alpha\beta}$  y  $Q_{\alpha\beta}$ , esto daría lugar a dos rombos distintos de diagonales paralelas, lo cual es imposible en virtud de **Teorema 2.8**.

Trazamos ahora dos rectas paralelas respectivamente a  $l_\alpha$  y  $l_\beta$ , que intersecan con el borde de nuestro óvalo en cuatro puntos  $A, A', B$  y  $B'$ , y tales puntos nos dan lugar al rombo inscrito  $ABA'B'$ .

De esta forma tenemos que por cada par de rectas ortogonales  $l_\alpha$  y  $l_\beta$  que pasan por  $P$  podemos construir un distinto inscrito en el óvalo. Obviamente, si sólo intercambiamos el orden de las rectas se obtiene el mismo rombo. Dicho de otro modo, existe una correspondencia uno a uno entre los pares de rectas ortogonales que pasan por  $P$  y los rombos inscritos en el óvalo.

Rotando una recta cualquiera  $l_\varepsilon$  que pasa por  $P$  desde  $l_\alpha$  hasta  $l_\beta$  de forma continua, su correspondiente ortogonal  $l_\eta$  rota también de modo continuo desde  $l_\beta$  hasta  $l_\alpha$ . Las correspondientes curvas sobre el óvalo  $C_\varepsilon$  y  $C_\eta$  varían de forma continua al tiempo que lo hacen sus extremos correspondientes  $S$  y  $T$ . El punto de intersección de  $C_\varepsilon$  y  $C_\eta$ , llámese  $P_{\varepsilon\eta}$ , va describiendo una curva continua, y consecuentemente el rombo correspondiente  $XX'YY'$  varía continuamente.

Resulta conveniente ilustrar la construcción, como se hace en la siguiente figura:



Por tanto, podemos construir dos funciones continuas definidas por las diagonales del rombo  $\lambda = XX'$  y  $\mu = YY'$ , de parámetro  $\theta$  asociado a la recta  $l_\epsilon$ . Podemos tomar  $\theta$  como el ángulo positivo que define  $l_\epsilon$  con el eje X, tomando tal parámetro valores en el intervalo de extremos los ángulos formados por  $l_\alpha$  y  $l_\beta$ , ambos incluidos, que llamamos  $\alpha$  y  $\beta$ .

Denotamos por  $a$  y  $b$  las diagonales del rombo original, y por  $\alpha$  y  $\beta$  los valores de  $\theta$  asociados a  $l_\alpha$  y  $l_\beta$ . Además, describimos las funciones mencionadas como

$$\lambda = \phi(\theta), \mu = \psi(\theta)$$

dando lugar a los ejes de los rombos. Como  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ , por lo que:

$$a = \phi(\alpha), b = \psi(\alpha)$$

Si ahora giramos la recta desde  $l_\alpha$  hasta  $l_\beta$ , se sigue que el rombo  $ABA'B'$  pasa a ser  $BA'B'A$ , lo que implica que

$$b = \phi(\beta), a = \psi(\beta)$$

Vemos que se cumplen las condiciones requeridas en **Proposición 2.9** por lo que necesariamente ha de existir al menos un  $\zeta \in [\alpha, \beta]$ , verificando que

$$\phi(\zeta) = \psi(\zeta)$$

Esto da lugar a un rombo inscrito en el óvalo cuyas diagonales tienen igual longitud, es decir, un **cuadrado inscrito**.  $\square$

## Capítulo 3

# Prueba de Lev Schirelmann

En 1929, el matemático ruso Lev. G .Schnirelmann propuso una solución a la Conjetura de Toeplitz para curvas con curvatura continua a trozos. Expondremos su idea, obtenida de [1], habiendo sido imposible localizar su publicación oficial de los resultados.

La idea de Schirelmann se basaba en un *argumento de bordismo*, planteando considerar el conjunto de cuadrados inscritos en una curva de este tipo como la anti-imagen de una aplicación que definiremos a continuación.

Sea  $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la curva dada. El espacio  $(\mathbb{S}^1)^4$  nos permite parametrizar los cuadriláteros inscritos en  $\gamma$ . Construimos para ello una **aplicación de testeo** (*test-map*):

$$f_\gamma : (\mathbb{S}^1)^4 \longrightarrow \mathbb{R}^6$$

que aplica la 4-upla  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  de puntos de la circunferencia a las distancias dos-a-dos entre  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \mathbb{R}^2$ . Es decir, se obtienen la 6-upla

$$(\|\gamma(x_1) - \gamma(x_2)\|, \|\gamma(x_2) - \gamma(x_3)\|, \|\gamma(x_3) - \gamma(x_4)\|, \\ \|\gamma(x_4) - \gamma(x_1)\|, \|\gamma(x_1) - \gamma(x_3)\|, \|\gamma(x_2) - \gamma(x_4)\|) \in \mathbb{R}^6$$

Sea ahora  $V$  el subespacio lineal 2-dimensional de  $\mathbb{R}^6$  asociado a los puntos donde los cuatro lados tengan igual longitud, así como las dos diagonales. Es decir, los puntos de la forma

$$\{(\lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \mu, \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

La anti-imagen  $f^{-1}(V)$  parametriza así el conjunto de cuadrados inscritos, existiendo componentes degenerados. Tales componentes degenerados consisten en puntos que verifican que  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ , lo que serían cuadriláteros unipuntuales o degenerados, o puntos donde  $x_1 = x_3$  y  $x_2 = x_4$ , lo que da lugar a segmentos.

Introducimos ahora una definición de utilidad para lo que sigue:

**Definición 3.1** Sean  $X$  y  $Y$  dos espacios topológicos, y  $f, g : X \rightarrow Y$  dos homeomorfismos. Una es una homotopía entre  $f$  y  $g$ , llámese  $H$ , se dice **isotopía** si  $H_t$  es un homeomorfismo, para todo  $t \in I = [0, 1]$ .

Schnirelmann argumentaba que una elipse, por simetría ha de inscribir exactamente un cuadrado. Por tanto, la idea es deformar una elipse hacia la curva dada  $\gamma$  mediante una **isotopía suave** a través de curvas  $\gamma_t$ , con  $t \in [0, 1]$ .

Esta idea se puede interpretar como una deformación de una aplicación en otra, similarmente a la homotopía.

Haciendo esto, algunos cuadrados de la anti-imagen aparecían dos-a-dos y otros se eliminaban dos-a-dos y, por la suavidad aplicada, los cuadriláteros inscritos no se deforman en puntos degenerados (a esto nos referíamos con el *argumento de bordismo*).

Además, los puntos no degenerados de todas las anti-imágenes  $f_{\gamma_t}^{-1}(V)$  forman una variedad 1-dimensional que conecta los conjuntos solución de  $\gamma$  con los de la elipse.

Por tanto, se puede deducir que la paridad del número de cuadrados inscritos en la curva  $\gamma$  y en la elipse coinciden y, como en la elipse hay un único cuadrado, concluimos que dicha curva inscribe un número impar de cuadrados.

## Capítulo 4

# Trabajo de Walter Stromquist

En este capítulo del trabajo se expone el trabajo realizado por Walter Stromquist, quien consiguió probar que toda **curva suave** en  $\mathbb{R}^n$  admite al menos un cuadrilátero inscrito con lados iguales y diagonales iguales, lo que, en  $\mathbb{R}^2$ , se reduce a la existencia de un cuadrado inscrito. Se aportará además una condición más fuerte para las curvas, la de ser **localmente monótonas**, que también implicará la existencia del cuadrado inscrito. [9]

Para llevar a cabo tales demostraciones se requerirán una serie de conceptos propios de **homología simplicial** y **homología singular**, los cuales serán previamente introducidos con cierto detalle.

### 4.1. Conceptos previos

En esta sección aportaremos la teoría previa necesaria comprender las demostraciones posteriores recogidas en el artículo de Stromquist. Introduciremos teoría de la homología con el fin de explicar unas nociones básicas y generales requeridas en este apartado.

Nuestros objetos de estudio serán la **homología simplicial** y la **homología singular**. La primera depende del espacio topológico asociado, el complejo simplicial (noción que se explicará detenidamente), mientras que la segunda se extiende a todos los espacios topológicos, generalizando los conceptos simpliciales mediante aplicaciones continuas. [6] [7] [8]

#### 4.1.1. Introducción a la homología simplicial

En este subapartado introducimos las ideas referentes a la **homología simplicial**, dando una serie de definiciones y resultados de carácter básico en este campo.

En lo sucesivo,  $\mathbb{R}^m$  denotará el espacio afín euclídeo de dimensión  $m$ .

**Definición 4.1** Sean los puntos  $v_0, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ , con  $n < m$ . Tales puntos son **afínmente independientes** entre sí si los vectores  $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$  son linealmente dependientes.

De igual modo, tales puntos se dicen afínmente independientes si no existe ninguna subvariedad afín de  $\mathbb{R}^m$  de dimensión estrictamente menor que  $n$  donde los puntos descansen. En este caso, todo punto  $x$  de la subvariedad afín generada puede expresarse de modo único como

$$x = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n$$

donde  $\lambda_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{0, \dots, n\}$  y además  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ .

**Definición 4.2** Sea  $k > 0$  y sean  $v_0, v_1, \dots, v_n$ , con  $n \geq 0$ , un conjunto de  $n + 1$  puntos afínmente independientes de  $\mathbb{R}^m$ . Un **símplice geométrico**  $n$ -dimensional de vértices  $v_0, v_1, \dots, v_n$  es un subconjunto  $\Delta(v_0, v_1, \dots, v_n)$  de  $\mathbb{R}^m$  definido por

$$\Delta(v_0, v_1, \dots, v_n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid x = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, \forall i \in \{0, \dots, n\} \right\}$$

En lo sucesivo, emplearemos la expresión  **$n$ -símplice** para referirnos a un **símplice**  $n$ -dimensional. Los **0-símplices** son puntos, los **1-símplices** son segmentos, los **2-símplices** son triángulos, los **3-símplices** son tetraedros, etc. En adelante, se denotará a un símplice por  $\Delta^n$  (o  $\Delta$  si se sobreentiende su dimensión).

**Observación 4.3** De forma intuitiva, puede entenderse un  $n$ -símplice como el análogo del triángulo en la dimensión  $n$ .

**Definición 4.4** Sea  $\Delta(v_0, v_1, \dots, v_n)$  un símplice  $n$ -dimensional. Llamamos **cara de dimensión  $k$**  de  $\Delta(v_0, v_1, \dots, v_n)$  a cualquier símplice generado por un subconjunto de  $k + 1$  vértices de  $\Delta(v_0, v_1, \dots, v_n)$ , esto es, un símplice  $\Delta(v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$ ,  $0 \leq i_0 < \dots < i_k \leq n$ .

**Definición 4.5** Dado un vértice  $v_i$  de un símplice  $\Delta(v_0, v_1, \dots, v_n)$  de dimensión  $n$ , se dice **cara opuesta** de  $v_i$  al símplice  $(n-1)$ -dimensional  $\Delta(v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$ .

**Observación 4.6:**

- Todas las caras de un símplice son símplices.
- Un  $n$ -símplice tiene exactamente  $2^{n+1} - 1$  caras totales. De hecho, para cada  $i \in \{0, \dots, n\}$ , tiene exactamente  $\binom{n+1}{i+1}$  caras de dimensión  $i$ .

**Definición 4.7** Un **complejo simplicial geométrico** en  $\mathbb{R}^m$  es un conjunto finito  $(K) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  de símplices de  $\mathbb{R}^N$  que verifican lo siguiente:

1. Si  $\sigma_i \in K$ , todas las caras de  $\sigma_i$  pertenecen a  $K$ .
2. Si  $\sigma_i, \sigma_j \in K$  y  $\sigma_i \cap \sigma_j \neq \emptyset \implies \sigma_i \cap \sigma_j$  es una cara de  $\sigma_i$  o de  $\sigma_j$ ,  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

**Definición 4.8** La **dimensión de un complejo simplicial**  $K$  es la mayor de las dimensiones de todos los símplices contenidos en  $K$ .

**Definición 4.9** Sea  $K$  un complejo simplicial. El **poliedro simplicial asociado a  $K$** , denotado por  $|K|$ , es la unión de todos los símplices de  $K$

$$|K| = \bigcup_{\sigma_i \in K} \sigma_i$$

El poliedro simplicial de un complejo simplicial de símplices definidos en  $\mathbb{R}^m$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^m$ .

**Definición 4.10** Sea  $X$  un espacio topológico, una **triangulación** de  $X$  es un homeomorfismo

entre  $X$  y el poliedro simplicial  $|K|$  de un complejo simplicial  $K$ .

Cuando hablamos de triangulación, se antoja necesario hablar del orden que damos a los vértices de nuestro símple. Cada símple  $\sigma$  admite dos orientaciones posibles, que dan lugar a dos clases de equivalencia. Decimos que  $\sigma$  es un símple orientado si escogemos una esas dos orientaciones, y se denota por  $[v_0, \dots, v_n]$ . Las caras de un símple respetan dicha orientación.

**Observación 4.11** No todo espacio topológico es triangulable. De hecho, se requiere como condición que tal espacio sea compacto, por serlo el poliedro simplicial.

**Definición 4.12** Sea  $K$  un complejo simplicial geométrico. Para cada  $n \geq -0$ , se define el **grupo de cadenas simpliciales n-dimensionales de  $K$** , denotado por  $C_n(K)$ , como el grupo abeliano generado por el conjunto de caras n-dimensionales ordenadas. Tales cadenas pueden expresarse como sumas finitas  $\sum_i \sigma_i m_i$ , donde los  $m_i \in \mathbb{Z}$  son coeficientes y los  $\sigma_i$  son los n-símples de  $K$ .

De otro modo, este grupo se puede denotar como

$$C_n(K) := \oplus \mathbb{Z}[\sigma]$$

La operación que dota a este conjunto del caracter de grupo es una suma componente a componente:

$$(m^1 \sigma_1 + \dots m^r \sigma_r) + (l^1 \sigma^1 + \dots + l^r \sigma_r) = (m^1 + l^1) \sigma_1 + \dots + (m^r + l^r) \sigma_n$$

donde  $r$  es el número de n-símples que hay en  $K$ .

Puede establecerse una biyección que haga corresponder a cada  $m^1 \sigma_1 + \dots m^r \sigma_r \in C_n(K)$  una m-upla de enteros  $(m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}^r$ . Dicha biyección conserva la suma, véase:

$$(m^1 \sigma_1 + \dots m^r \sigma_r) + (l^1 \sigma^1 + \dots + l^r \sigma_r) \longleftrightarrow (m_1 + l_1, \dots, m_r + l_r)$$

Por tanto, tal biyección es un isomorfismo de grupos, es decir:

$$C_n(K) \cong \mathbb{Z}^m$$

**Ejemplo 4.13** considerando un 3-símple  $[v_0, v_1, v_2, v_3]$ , y el complejo simplicial asociado :

$$K = \{[v_0, v_1, v_2, v_3], [v_0, v_1, v_2], [v_0, v_1, v_3], [v_0, v_2, v_3], \\ [v_1, v_2, v_3], [v_0, v_1], [v_0, v_2], [v_0, v_3], [v_1, v_2], [v_1, v_3], \\ [v_2, v_3], [v_0], [v_1], [v_2], [v_3]\}$$

podemos definir las cadenas simpliciales como:

$$C_0(K) = \mathbb{Z}[v_0] \oplus \mathbb{Z}[v_1] \oplus \mathbb{Z}[v_2] \oplus \mathbb{Z}[v_3] \cong \mathbb{Z}^4$$

$$C_1(K) = \mathbb{Z}[v_0, v_1] \oplus \mathbb{Z}[v_0, v_2] \oplus \mathbb{Z}[v_0, v_3] \oplus \mathbb{Z}[v_1, v_2] \oplus \mathbb{Z}[v_1, v_3] \oplus \mathbb{Z}[v_2, v_3] \cong \mathbb{Z}^6$$

$$C_2(K) = \mathbb{Z}[v_0, v_1, v_2] \oplus \mathbb{Z}[v_0, v_1, v_3] \oplus \mathbb{Z}[v_0, v_2, v_3] \oplus \mathbb{Z}[v_1, v_2, v_3] \cong \mathbb{Z}^4$$

$$C_3(K) = \mathbb{Z}[v_0, v_1, v_2, v_3] \cong \mathbb{Z}$$

**Definición 4.14** Sea  $K$  un complejo simplicial ordenado. Para todo  $n \geq 1$ , llamamos **operador borde** al morfismo de grupos

$$\partial_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$$

que sobre un  $n$ -símplice  $\sigma$  de  $K$  actúa del siguiente modo:

$$\partial_n \sigma = \partial_n[v_0, \dots, v_n] = \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$$

dónde  $[v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$  es el  $(n-1)$ -símplice resultante de eliminar el vértice  $v_i$ .

**Ejemplo 4.15** Considerando el 2-símplice  $\sigma = [v_0, v_1, v_2]$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \partial_2[v_0, v_1, v_2] &= [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1] \\ \partial_1(\partial_2[v_0, v_1, v_2]) &= [v_2] - [v_1] - [v_2] + [v_0] + [v_1] - [v_0] = 0 \end{aligned}$$

**Observación 4.16**

Geoméricamente, el borde de un  $n$ -símplice  $[v_0, \dots, v_n]$  es la  $(n-1)$ -cadena simplicial resultante de la suma de los símplices ordenados  $[v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$  como se ha definido anteriormente.

Se tiene en cuenta la orientación del símplice original, pues las caras con signo positivo preservan la orientación, y las de signo negativo la invierten.

A continuación, introduciremos una propiedad del **operador borde** que resulta fundamental para el funcionamiento de los grupos de homología, así como para la prueba de Stromquist, nuestro objetivo final en este capítulo:

**Lema 4.17** Sea  $K$  un complejo simplicial cualquiera, y  $[v_0, \dots, v_n]$  un  $n$ -símplice de  $K$ . Entonces,  $\partial_n \circ \partial_{n-1} = 0$ ,  $\forall n \geq 1$ .

*Demostración:*

Sea  $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$  un  $n$ -símplice cualquiera. Aplicamos sobre  $\sigma$  el operador frontera dos veces:

$$\begin{aligned} \partial_n \circ \partial_{n-1}[v_0, \dots, v_n] &= \partial_{n-1}\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]\right) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_{n-1}[v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] \\ &= \underbrace{\sum_{j<i} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}_{(1)} + \underbrace{\sum_{j>i} (-1)^{i+j-1} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n]}_{(2)} \end{aligned}$$

Fijamos  $k_1 < k_2$ :



■ Si  $k_1 + k_2 - 1 \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow k_1 + k_2 \equiv 1 \pmod{2}$

■ Si  $k_1 + k_2 - 1 \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow k_1 + k_2 \equiv 0 \pmod{2}$

Si  $i = k_1, j = k_2$ , tenemos el término **(2)**,  $(-1)^{k_1+k_2-1}[v_0, \dots, \hat{v}_{k_1}, \dots, \hat{v}_{k_2}, \dots, v_n]$

Si  $i = k_2, j = k_1$ , tenemos el término **(1)**,  $(-1)^{k_1+k_2}[v_0, \dots, \hat{v}_{k_1}, \dots, \hat{v}_{k_2}, \dots, v_n]$

Por lo expuesto previamente

$$(-1)^{k_1+k_2-1}[v_0, \dots, \hat{v}_{k_1}, \dots, \hat{v}_{k_2}, \dots, v_n] + (-1)^{k_1+k_2}[v_0, \dots, \hat{v}_{k_1}, \dots, \hat{v}_{k_2}, \dots, v_n] = 0$$

Como  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  con las restricciones dadas, se deduce que los términos de la suma se anulan dos a dos, lo que concluye la demostración.  $\square$

**Definición 4.18** Sea  $K$  un complejo simplicial,  $n \geq 1$  y  $C_n$  el grupo de cadenas  $n$ -dimensionales de  $K$ :

- El núcleo de  $\partial_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$  se llama **grupo de  $n$ -ciclos** y se denota por  $Z_n(K)$ .
- La imagen de  $\partial_{n+1} : C_{n+1}(K) \rightarrow C_n(K)$  se llama **grupo de  $n$ -bordes** y se denota por  $B_n(K)$ .
- Se denomina  **$n$ -ésimo grupo de homología de  $K$** , y se denota por  $H_n(K)$  al grupo cociente

$$H_n(K) = \frac{Z_n(K)}{B_n(K)} = \frac{\ker(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}$$

Tiene sentido definir este grupo cociente, ya que en virtud del lema anterior,  $B_n(K) \subseteq Z_n(K)$ .

**Ejemplo 4.19** Sea el complejo simplicial  $K$ , de vértices  $a_0, a_1, a_2$ , representado en la siguiente figura:

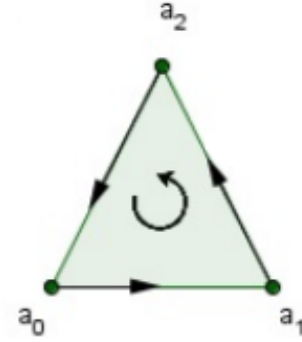


Figura 4.1: Simplejo 2-dimensional

Si queremos calcular su primer grupo de homología, debemos obtener  $Z_1(K)$  y  $H_1(K)$ . Sea  $c \in C_1(K)$  una cadena 1-simplicial, por tanto, de la forma:

$$c = m_1[a_0, a_1] + m_2[a_1, a_2] + m_3[a_2, a_0]$$

con  $m_i \in \mathbb{Z}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Por tanto:

$$\begin{aligned}\partial(c) &= m_1 a_1 - m_1 a_0 + m_2 a_2 - m_2 a_1 + m_3 a_0 - m_3 a_2 \\ &= a_0(m_3 - m_1) + a_1(m_1 - m_2) + a_2(m_2 - m_3)\end{aligned}$$

De este modo:

$$\partial(c) = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = m_3$$

por lo que podemos escribir de la forma  $c = m_1([a_0, a_1] + [a_1, a_2] + [a_2, a_0])$  y la cadena  $c' = [a_0, a_1] + [a_1, a_2] + [a_2, a_0]$  es un generador del grupo.

Por tanto, siendo  $Z_1(K)$  un grupo abeliano y libre por definición, podemos concluir que

$$Z_1(K) \cong \mathbb{Z}$$

Por otro lado, para  $B_1(K) = \text{Im}(\partial_2)$  basta tomar la imagen del único 2-símplice de  $K$ :

$$\partial_2(n_4([a_0, a_1, a_2])) = n_4([a_1, a_2] - [a_0, a_2] + [a_0, a_1])$$

Razonando del mismo modo:

$$H_1(K) \cong \mathbb{Z}$$

por lo que el primer grupo de homología es el trivial:

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)} = \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} = e$$

Tras haber mostrado las propiedades básicas de los símlices, procedemos, en el siguiente apartado, a mostrar la aplicación de los símlices a cualquier espacio topológico, es decir, generalizar lo explicado.

#### 4.1.2. Símlices y aplicaciones continuas: Homología singular

La homología singular, como veremos a continuación, supone un cambio en el punto de vista de los símlices: pasan de ser “los ladrillos” que construyen el espacio (poliedro simplicial) a aplicarse en otros espacios topológicos mediante funciones continuas.

**Definición 4.20** Sea  $\Delta^n$  un  $n$ -símplice cualquiera. Sea  $X$  un espacio topológico cualquiera. Un **n-símplice singular de X** es cualquier aplicación continua  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ .

**Definición 4.21** Sea  $X$  un espacio topológico. Se define como **grupo de cadenas singulares n-dimensionales de X** al grupo libre abeliano generado por los símlices singulares  $n$ -dimensionales de  $X$  previamente definidos, y se denota como  $S_n(X)$

$$S_n(X) = \left\{ \sum_{i=1}^n m_i \sigma_i, \sigma_i : \Delta^n \rightarrow X, m_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

Al igual que ocurría con las cadenas simpliciales, sobre este grupo también se define un **operador borde**  $\partial_n : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$  que actúa sobre una cadena singular  $\sigma$  de  $X$  del siguiente modo:

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ \delta_i$$

donde  $\delta_i : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$  es la aplicación continua definida como sigue:

$$\delta_i(x_0, \dots, x_{p-1}) = (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_n)$$

para todo  $i$ ,  $0 \leq i \leq n$ .

Esto nos permite definir el grupo de homología singular sobre  $X$  del mismo modo que en homología simplicial:

$$H_n(X) = \frac{Ker(\partial_n)}{Im(\partial_{n+1})}$$

A continuación, se exponen una serie de resultados que manifiestan el caracter funtorial de la homología singular, que permite relacionar la categoría de espacios topológicos y la de grupos abelianos.

**Proposición 4.22** Sean  $X, Y$  dos espacios topológicos,  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua, y  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  un símplice singular. Entonces, la función  $f_*(\sigma) = (f \circ \sigma) : \Delta^n \rightarrow Y$  es un símplice singular, y es extensible a un morfismo entre los grupos de cadenas:

$$\begin{aligned} f_* : S_n(X) &\longrightarrow S_n(Y) \\ c = \sum_{i=1}^n m_i \sigma_i &\longrightarrow \sum_{i=1}^n m_i f_*(\sigma_i) \end{aligned}$$

**Lema 4.23** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación entre espacios topológicos. Entonces se verifica que  $\partial_n \circ f_* = f_* \circ \partial_n$ , como se ilustra en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & S_{n-1}(X) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ S_n(Y) & \xrightarrow{\partial_n} & S_{n-1}(Y) \end{array}$$

En particular,  $f_*$  aplica ciclos en ciclos (elementos de  $Z_n$ ) y bordes en bordes (elementos de  $H_n$ ). Además, induce un morfismo entre los grupos de homología singular:

$$\begin{aligned} H_*(f) : H_n(X) &\longrightarrow H_n(Y) \\ ([z]) &\longrightarrow [f_*(z)] \end{aligned}$$

para cualquier ciclo  $z \in Z_n(X)$ .

**Observación 4.24 (Propiedades funtoriales de la homología singular)**

- Sea  $Z$  otro espacio topológico,  $g : Y \rightarrow Z$  una aplicación continua. Entonces

$$H_*(g \circ f) = H_*(g) \circ H_*(f)$$

- Si  $f = id_X$ , se tiene:

$$H_*(id_X) = id_{H_*(X)}$$

- Si  $f$  es un homeomorfismo,  $H_*(f)$  es un isomorfismo. Es decir, la homología singular es un invariante topológico.

**Teorema 4.25** Sean  $X, Y$  dos espacios topológicos y  $f, g : X \rightarrow Y$  dos aplicaciones continuas. Si  $f$  y  $g$  son homótopas, se tiene que  $H_*(f) = H_*(g) : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ .

Este teorema, que equivale a decir que dos aplicaciones homótopas inducen los mismos morfismos entre los grupos de homología, prueba la invariancia homotópica de la homología singular, y nos permite definir el siguiente resultado:

**Corolario 4.26** Si  $X$  e  $Y$  son espacios homotópicamente equivalentes, entonces  $H_*(X) \cong H_*(Y)$

### 4.1.3. Relación entre homologías

Las propiedades mostradas a lo largo de estos apartados nos permiten asociar la homología simplicial de un poliedro a la homología singular sobre el espacio topológico asociado a tal poliedro, del siguiente modo:

Consideramos un complejo simplicial ordenado  $K$ . Sea  $\{v_1, \dots, v_s\}$  su conjunto de vértices, y  $C_*(K)$  su complejo de cadenas simpliciales. Como hemos visto, el poliedro asociado  $|K|$  es un espacio topológico, por lo que puede definirse sobre él el complejo de cadenas singulares  $S_*(K)$ .

Sea  $\alpha = [v_{i_0}, \dots, v_{i_n}]$  un símple  $n$ -dimensional de  $K$ ,  $\sigma$  define un símple singular  $n$ -dimensional  $\sigma = (v_{i_0}, \dots, v_{i_n})$ , y nos permite definir la aplicación

$$\nu : C_*(K) \longrightarrow S_*(K)$$

$$\alpha \longmapsto \sigma$$

**Lema 4.27** La aplicación  $\nu$  es un morfismo de complejos simpliciales, que a su vez induce un nuevo morfismo

$$H_*(\nu) : H_*(K) \longrightarrow H_*(|K|)$$

De este modo, tenemos la asociación buscada entre la homología simplicial y la singular.

## 4.2. Cuadrado inscrito en curvas suaves

En este subapartado mostraremos la prueba que dió Walter Stromquist para la Conjetura en el caso de las **curvas suaves**, para la que emplea la mayor parte de las nociones ya introducidas aplicándolas a conveniencia, dándolas forma y construyendo el resultado final: toda curva suave en  $\mathbb{R}^m$  admite un cuadrilátero inscrito, para todo  $m$ . [9]

Comenzamos definiendo los elementos de la afirmación a probar:

**Definición 4.28** Una **curva cerrada simple** es una función continua  $w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  verificando:

$$w(x) = w(y) \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

También puede verse como una aplicación inyectiva  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde, si  $n = 2$ , se dice que  $w$  es curva de Jordan.

**Definición 4.29** La curva  $w$  se dice **curva suave** si el vector tangente sobre  $w$  puede definirse de modo continuo, esto es, si la derivada de la curva no se anula en ningún punto, por lo que no existen puntos angulosos.

**Definición 4.30** Un **cuadrilátero inscrito** en la curva  $w$  es aquel cuyos cuatro vértices están sobre la curva. En  $\mathbb{R}^2$ , el cuadrilátero se considera inscrito aunque sus lados no estén en el interior de la curva.

Vamos a trabajar con un símple  $Q$ , que representará de aquí en adelante el conjunto de cuadriláteros inscritos en  $w$ . Es decir, el conjunto de elementos geométricos inscritos en  $w$  que podrían ser el cuadrado que buscamos. Trabajaremos también con cuatro subconjuntos  $Q_1, Q_2, Q_3$  y  $Q_4$  tales que  $Q \subseteq \bigcup_{i=1}^4 Q_i$  y cuya intersección corresponderá al conjunto de rombos inscritos.

El conjunto:

$$Q = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq 1\}$$

define un 4-símple de vértices:

$$v_0 = (1, 1, 1, 1)$$

$$v_1 = (0, 1, 1, 1)$$

$$v_2 = (0, 0, 1, 1)$$

$$v_3 = (0, 0, 0, 1)$$

$$v_4 = (0, 0, 0, 0)$$

cuyas caras se denotan como  $F_0, \dots, F_4$ , de modo que la cara  $F_i$  es la opuesta a  $v_i$ , y generada por los cuatro vértices restantes. Como puede deducirse, cada cara 3-dimensional  $F_i$  de  $Q$  es un tetraedro (3-símple).

Se trata de ilustrar, a pesar de las dificultades de representar un objeto 4-dimensional, el símple  $Q$  en la siguiente figura:

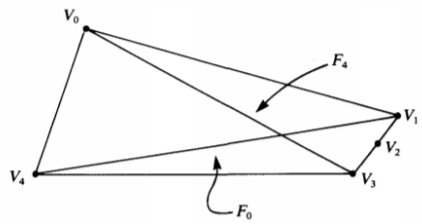


Figura 4.2: Símple 4-dimensional  $Q$

Aquí, las caras superior e inferior de la figura representan las caras  $F_4$  y  $F_0$  respectivamente, mientras que el segmento a la derecha representa la intersección  $F_0 \cap F_4$ , y se trata de un 2-símple.

Dada una curva  $w$ , asociamos a cada punto  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in Q$  un cuadrilátero inscrito con vértices  $w(x_1), w(x_2), w(x_3), w(x_4)$ . Esto es, asociamos cada punto de  $Q$  a su figura geométrica sobre la curva  $w$ . De este modo y como mencionamos previamente, el conjunto o símplice  $Q$  representa el conjunto de cuadriláteros inscritos en  $w$ .

Los vértices de cada cuadrilátero se ordenan en igual orden cíclico en el cuadrilátero que en la propia curva  $w$ . Algunos de estos cuadriláteros son degenerados, es decir, tienen al menos un lado de longitud nula. Puede ocurrir también la existencia de cuadriláteros unipuntuales ( $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ ).

Mencionamos también un importante hecho acerca de las caras  $F_0$  y  $F_4$ . Uno puede asociar en  $F_0$  al conjunto de cuadriláteros sobre  $w$  con  $w(0)$  fijo y, de igual modo, en  $F_4$  como el conjunto de cuadriláteros con  $w(1)$  fijo. En consecuencia, ambas caras son básicamente la misma puesto que, por definición de curva cerrada simple,  $w(0) = w(1)$ . Por tanto, la correspondencia entre puntos de  $Q$  y cuadriláteros sobre la curva no es uno-a-uno. Si definimos una aplicación

$$\begin{aligned} h : F_0 &\longrightarrow F_4 \\ (0, x, y, z) &\longmapsto (x, y, z, 1) \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde si  $(0, x, y, z)$  representa un cuadrilátero,  $h((0, x, y, z))$  representa el mismo con distinta numeración de vértices.

**Definición 4.31** Para cada  $x \in Q$ , definimos la **longitud del i-ésimo lado** del cuadrilátero asociado a  $x$  como el valor

$$s_i(x) = \|w(x_{i+1}) - w(x_i)\|$$

Obviamente, esta definición es aplicable para  $i=1,2,3,4$ , entendiéndose que para  $i=4$ ,  $x_{i+1} = x_1$ . Cada  $s_i$  es una función continua sobre el símplice  $Q$ .

**Definición 4.32** Denotando  $Q^0$  como el interior de  $Q$ , definimos  $Q_i$  para cada  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$   $Q_i$  como la adherencia del conjunto

$$\{x \in Q^0 \mid s_i(x) = \max_j s_j(x)\}$$

Dicho de otro modo,  $Q_i \subset Q$  es el subconjunto de puntos de  $Q$  tales que el mayor lado de su cuadrilátero asociado es el  $i$ -ésimo. Un punto de  $\partial Q$  está incluido en  $Q_i$  sólo si puede expresarse como el límite de cuadriláteros en  $Q^0$  que estén en  $Q_i$ .

Cada  $Q_i$  es cerrado, y se verifica  $\bigcup_i Q_i = Q$ . Con las condiciones expuestas se evita que los cuadriláteros unipuntuales ya mencionados pertenezcan a todos los  $Q_i$ .

**Lema 4.33** Si  $w$  es una curva suave, entonces cada cuadrilátero unipuntual está contenido en un único conjunto  $Q_i$ . En particular,  $v_i \in Q_i$ ,  $\forall i \in \{1, 2, 3\}$  y  $x \in Q_4$  para todo  $x$  perteneciente al borde entre  $v_0$  y  $v_4$ .

Este lema, que será probado más adelante en una versión más fuerte, requiere ser explicado con detenimiento:

Los vértices  $v_0, v_1, \dots, v_4$  son cuadriláteros unipuntuales, pues como hemos mencionado previamente,  $w(0) = w(1)$ , lo cual implica que  $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0$ , para todo  $v_i$  con  $i \in \{0, \dots, 4\}$ . Por tanto, es natural pensar que  $v_1 \in Q_1$ ,  $v_2 \in Q_2$ ,  $v_3 \in Q_3$ , mientras que todo el borde entre  $v_0$  y  $v_4$  (ambos puntos incluidos) se encuentra en  $Q_4$ .

Como  $v_0 = (1, 1, 1, 1)$  y  $v_4 = (0, 0, 0, 0)$ , todos los puntos entre ellos pueden representarse como  $(\lambda, \lambda, \lambda, \lambda)$ , con  $\lambda \in [0, 1]$ . Por lo tanto, todos sus cuadriláteros asociados serán unipuntuales, lo cual no sucede en el resto de bordes de  $Q$ .

Por ejemplo, los puntos del borde que conecta  $v_1$  con  $v_2$  se representan por  $(0, \lambda, 1, 1)$ . Esto corresponde a cuadriláteros con un único lado no nulo, que conecta  $w(\lambda)$  con  $w(0)$ , salvo obviamente en los extremos  $\lambda = 0$  y  $\lambda = 1$ .

De este modo, todos los puntos situados en los lados que conectan los cinco vértices de  $Q$  (salvo los propios vértices) están asociados a cuadriláteros con tres lados de longitud nula, salvo en el lado entre  $v_0$  y  $v_4$ , cuyos puntos corresponden a cuadriláteros unipuntuales.

Además, echando un vistazo a los puntos en los lados (o caras) de  $Q$ , vemos que los puntos situados en los 2-símplices se asocian a cuadriláteros de un único lado de longitud nula.

Por ejemplo, los puntos en  $F_0 \cap F_4$ , representados por  $(0, \lambda, \mu, 1)$  con  $\mu, \lambda \in [0, 1]$  cumplen que al menos dos de los vértices del cuadrilátero correspondiente coinciden, por lo que habrá al menos un lado de longitud nula.

Los puntos en las caras  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  dan lugar también a cuadriláteros degenerados (al menos un lado de longitud nula). Sin embargo, los puntos situados en el interior de  $F_0$  y  $F_4$  pueden no asociar cuadriláteros degenerados: en  $F_0$ , todos los puntos son de la forma  $(0, \mu, \lambda, \gamma)$  y en  $F_4$  son  $(\mu, \lambda, \gamma, 1)$  con  $\mu, \lambda, \gamma \in [0, 1]$ . En ambas caras, todos sus puntos tienen un vértice del cuadrilátero fijo ( $w(0)$  y  $w(1)$  respectivamente), pero no asocian cuadriláteros degenerados salvo los casos  $\mu = \lambda$ ,  $\mu = \gamma$  o  $\lambda = \gamma$ .

Tratamos de evitar los casos degenerados, pues nuestro objetivo es encontrar un cuadrilátero en  $\mathbb{R}^2$  de lados iguales y diagonales iguales: un cuadrado. Esta es la razón por la que trabajamos con las caras  $F_0$  y  $F_4$ .

Para  $i=1,2,3$  vemos que  $Q_i$  incluye al vértice  $v_i$  pero no interseca a la cara opuesta  $F_i$  (donde  $s_i(x) = 0$ ).

Por ejemplo,  $v_1 \in Q_1$ , pero los puntos de  $F_1$  están representados por  $x = (\lambda, \lambda, \mu, \gamma)$  con  $\lambda, \mu, \gamma \in [0, 1]$ . Entonces,  $s_1(x) = \|w(\lambda) - w(\lambda)\| = 0, \forall x \in F_1$ , por lo que obviamente  $s_1$  no puede ser la distancia más larga del lado del cuadrilátero asociado a  $x$ .

Para  $i=4$  es diferente:  $Q_4$  incluye todo el segmento entre  $v_0$  y  $v_4$ , y es disjunto con  $F_0 \cap F_4$ .

La condición de suavidad de  $w$  solo se requiere para este lema. En lo sucesivo, consideramos que  $w$  es cualquier curva que verifique dicho lema.

Sea  $R = \bigcap_i Q_i$ . Con la definición previamente expuesta de los conjuntos  $Q_i$ , podemos deducir que  $R$  es el conjunto de todos los puntos de  $Q$  cuyos cuadriláteros asociados tienen los cuatro lados de igual longitud. En este contexto podemos dar la siguiente definición:

**Definición 4.34:** Llamamos **rombo** a cualquier punto  $x$  del conjunto  $R$  previamente descrito.

Por tanto, entendemos un rombo como un cuadrilátero equilátero de lados no nulos. Yendo un paso más allá, definimos los valores

$$d_{13}(x) = \|w(x_3) - w(x_1)\|$$

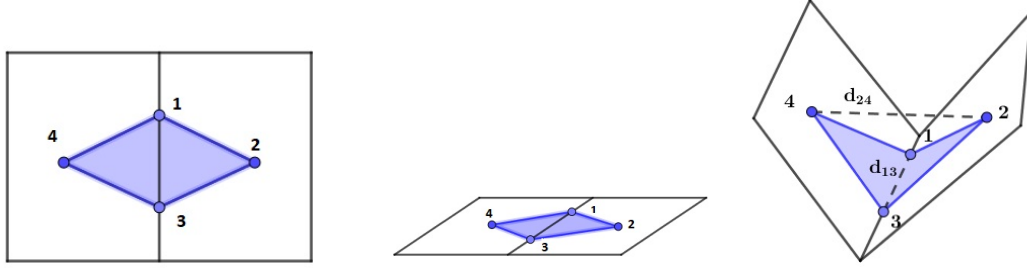
$$d_{24}(x) = \|w(x_4) - w(x_2)\|$$

**Definición 4.35** Un **cuadrilátero de tipo de cuadrado** (*square-like quadrilateral*) es un rombo que verifica

$$d_{12}(x) = d_{24}(x)$$

En  $\mathbb{R}^2$ , un **cuadrilátero de tipo cuadrado** equivale a un cuadrado inscrito, pero empleamos el término *rombo* para incluir cuadriláteros equiláteros en dimensiones superiores.

A continuación, se ilustra un cuadrilátero de tipo cuadrado en  $\mathbb{R}^3$  que no es un cuadrado:



Como se observa en la figura, la construcción se puede realizar a través de un rombo sobre una hoja partida por la mitad, que separa al rombo en dos triángulos isósceles. Basta doblar la hoja hasta que las diagonales del rombo,  $d_{13}$  y  $d_{24}$ , alcancen igual longitud. Como las longitudes de los lados en ese proceso se mantiene, se da lugar así a un **cuadrilátero de tipo cuadrado** en  $\mathbb{R}^3$ .

**Definición 4.36** Un **rombo delgado** es un rombo que verifica  $d_{13} \geq d_{24}$ , y un **rombo grueso** es aquel que cumple  $d_{13} \leq d_{24}$ . Un rombo que sea a la vez delgado y grueso es un **cuadrilátero de tipo cuadrado**.

Denotamos por  $R_{DELGADO}$  y  $R_{GRUESO}$  los subconjuntos de  $R$  cuyos rombos son delgados y gruesos respectivamente. Obviamente  $R = R_{DELGADO} \cup R_{GRUESO}$ .

Nótese que si  $x \in F_0$  es un rombo, lo es  $h(x)$  (recuérdese  $h$  como la función descrita en (4.1)), y si  $x$  es un rombo delgado se tiene que  $h(x)$  es grueso, y viceversa, pues  $h$  solo altera la numeración de los vértices y por tanto la de las diagonales.

Antes de continuar, procedemos a hacer una lectura de la estrategia general. Hemos mostrado una serie de herramientas y definiciones requeridas para resolver nuestro problema. Nuestra estrategia consistirá en el estudio del conjunto de rombos en  $Q$ , especialmente los que estén en  $F_0$  y  $F_4$ . Mostraremos que, en cierto sentido, debe haber un número impar de rombos en  $F_0$ . Si probásemos que el número de rombos es par, no podríamos descartar que fuese cero, por lo que necesitamos probar que es impar.

Además, si el número de rombos delgados en  $F_0$  fuese, por ejemplo, par, el número de rombos gruesos debería ser impar. La correspondencia basada en la aplicación  $h$  nos muestra que la paridad se debe revertir en  $F_4$ . Pero también mostraremos que las paridades no pueden revertirse pues la cara trasera puede alzarse de un modo continuo hacia la cara delantera (a no ser que el conjunto  $R_{DELGADO}$  y  $R_{GRUESO}$  intersequen).

Para probar todo esto aplicaremos la teoría de homología ya introducida:



En esta parte de la sección definiremos el concepto de **grado** de un subconjunto  $K$  de un símple, dando un recubrimiento de tal símple por conjuntos cerrados. Aplicado a nuestro objetivo,  $K$  será un conjunto de rombos, y el grado será nuestro modo de contar rombos módulo 2. Además, todos los grupos de homología serán grupos de homología simplicial con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$ .

En lo sucesivo denotaremos las caras y los vértices de un símple  $A$  como  $\{F_i\}_{i=1}^n$  y  $\{v_i\}_{i=1}^n$ .

**Definición 4.37** Sea  $A$  un  $n$ -símple. Un **recubrimiento de entornos cerrados de los vértices** de  $A$  es una familia de subconjuntos cerrados  $A_0, \dots, A_n$  de  $A$  tales que  $v_i \in A_i$  pero  $F_i \cap A_i = \emptyset$ ,  $\forall i \in \{0, \dots, n\}$  y  $\cup_i A_i = A$ . Denotamos este recubrimiento por  $\{A_i\}$ . Probaremos que  $\cap A_i$  es no vacía, y, en cierto sentido definido, es par.

Sea  $\{A_i\}$  un recubrimiento de un símple  $A$ . Sea  $K$  un subconjunto de  $\cap A_i$ , que es tanto abierto como cerrado con la topología relativa a  $\cap A_i$  (estamos incluyendo los casos  $K = \emptyset$  y  $K = \cap A_i$ ). En otras palabras, tomamos  $K$  como una componente conexa de  $\cap A_i$  y queremos definir el grado del recubrimiento  $\{A_i\}$  alrededor de nuestro  $K$ . Tal grado es un elemento de  $\mathbb{Z}_2$ , y nos dice si considerar  $K$  como par o como impar.

**Definición 4.38** Una **aplicación de reverso** para el recubrimiento  $\{A_i\}$  es una función

$$f : (A - \cap A_i) \longrightarrow \partial A$$

que aplica cada conjunto  $A_i$  en la cara opuesta  $F_i$ . Es decir,  $f(A_i) \subseteq F_i, \forall i \in \{0, \dots, n\}$ . Veremos esto de modo más preciso cuando definamos  $f$ .

Mostremos que la aplicación de reverso siempre existe. Para cada  $i$ , sea  $d(x, A_i)$  la distancia de  $x$  a  $A_i$  y definamos  $f$  como

$$f(x) = \sum_i \frac{d(x, A_i)}{\sum_j d(x, A_j)} v_i$$

La suma  $\sum_j d(x, A_j)$  normaliza cada coeficiente al ser la suma de todas las distancias de  $x$  a cada  $A_i$ .

Dado un número  $k \in \{0, \dots, n\}$ , si  $x \in A_k$ , se tiene

$$d(x, A_k) = 0$$

Sin embargo, por definición se tiene que

$$x \notin \cap A_i \Rightarrow \exists i \in \{0, \dots, n\} : x \notin A_i \Rightarrow d(x, A_i) \neq 0$$

y de esta forma nos aseguramos de que el denominador nunca se anula, y  $f$  está bien definida.

Así, si  $x \in A_k$ , tenemos una combinación lineal con todos los vértices salvo  $v_k$ , lo cual implica que  $f(x) \in F_k$  (la cara del símple que no contiene a  $v_k$ ), por lo que cada punto  $x$  se envía a la cara opuesta del conjunto al que pertenece.

Normalizar los coeficientes nos asegura que la imagen está restringida a esa cara específica, dándonos  $f(x)$  como una combinación lineal de vértices  $v_i$  de tal modo que  $f(x) \in A, \forall x$ .

Sea ahora el conjunto  $L = \cap A_i - K$ . Triangulamos  $A$  de modo que ningún símple de la triangulación interseque simultáneamente a  $L$  y a  $K$ . Sea  $\Gamma$  la  $n$ -cadena compuesta por los  $n$ -símples que intersecan  $K$ . Hemos triangulado  $A$  de tal modo que sólo una cara de cada  $n$ -símple interseca  $K$ . Como sabemos, una cara de un  $n$ -símple es un  $(n-1)$ -símple. Entonces,

el borde de  $\Gamma$ , compuesto por todos los  $n$  símplices en  $A$  sin las caras que no tocan  $K$ , representa una clase de homología  $\gamma \in H_{n-1}(A - \cap A_i)$ . La  $(n-1)$ -dimension  es debida a las caras de los  $n$ -símplices intersecando  $K$ ; y es una homología de  $A - \cap A_i$  porque los  $n$ -símplices sólo interesan  $K$  con una de sus caras. Denotamos esta clase por  $\gamma_K$ , siendo la única clase que toca todo  $K$  pero nada de  $L$ .

El grado de  $\{A_i\}$  alrededor de  $K$  se define como la imagen  $f_*(\gamma_K)$  en  $H_{n-1}(\partial A)$ , donde  $f$  es cualquier aplicación de reverso sobre  $\{A_i\}$ . El grupo  $H_{n-1}(\partial A)$  puede identificarse con  $\mathbb{Z}_2$ , por lo que consideramos el grado como un elemento de  $\mathbb{Z}_2$ . Su valor, que es independiente de las elecciones hechas en la construcción previa, lo denotamos por  $\deg_{\{A_i\}} K$ , o por  $\deg K$  cuando el recubrimiento se sobreentienda.

En particular, sea  $B$  un  $n$ -símplice cualquiera y  $f : (A - \cap A_i) \longrightarrow \partial B$  cualquier función que aplique cada  $A_i$  en una cara distinta de  $B$ . Entonces, el grado de  $K$  puede simplemente haberse definido como  $f_*(\gamma_K)$  en  $H_{n-1}(\partial B)$  pues existe un isomorfismo  $g : B \longrightarrow A$  que convierte  $gf$  en una aplicación de reverso, y se cumple que  $(gf)_*(\gamma_K) = f_*(\gamma_K)$ . En este caso, decimos que  $f$  es **isomorfa a una aplicación de reverso**.

Podemos exponer varias características de estos grados. Si  $K \neq 0$ , entonces  $\gamma_K = 0$  (el elemento cero de  $H_{n-1}(A - \cap A_i)$ ). Si  $K$  puede expresarse como unión disjunta de conjuntos abiertos y cerrados  $K_1$  y  $K_2$ , entonces  $\gamma_K = \gamma_{K_1} + \gamma_{K_2}$ . A continuación, se exponen los siguientes lemas:

**Lema 4.39**  $\deg \emptyset = 0$ .

**Lema 4.40** Si  $K = K_1 + K_2$ , entonces  $\deg K = \deg K_1 + \deg K_2$ .

**Lema 4.41**  $\deg(\cap A_i) = 1$

*Demostración:*

Sea  $\mathbb{S}^{n-1}$  la esfera  $(n-1)$ -dimensional, y sea  $g : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  cualquier aplicación continua en puntos fijos. Veamos, en primer lugar, que  $g \sim a$ , donde:

$$\begin{aligned} a : \mathbb{S}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ x &\longmapsto -x \end{aligned}$$

es la aplicación antipodal de  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Para ello, definimos una homotopía

$$\begin{aligned} H : (\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]) &\longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ (x, t) &\longmapsto \frac{tg(x) + (1-t)a(x)}{\|tg(x) + (1-t)a(x)\|} \end{aligned}$$

Para ver que esta homotopía est  bien definida, basta ver que el segmento  $tx + (1-t)a(x)$  pasa por el centro  $O$  de la esfera, y, como por hipótesis  $g(x) \neq x, \forall x$ ,  $tg(x) + (1-t)a(x)$  no pasa por  $O$ , por lo que no se anula. Además:

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= \frac{a(x)}{\|a(x)\|} = a(x) \\ H(x, 1) &= \frac{g(x)}{\|g(x)\|} = g(x) \end{aligned}$$

Tenemos entonces que  $g$  es homótopa a la aplicación antipodal, como se quería probar. Esto implica, en virtud del **Teorema 4.25**, que ambas aplicaciones generan la misma aplicación en homología, es decir,  $g_* = a_*$ . Por otro lado,  $a$  es un homeomorfismo de la esfera, siéndolo por tanto  $g$ , por lo que

$$g_* : H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$$

es la identidad. Ahora, como  $A$  es un  $n$ -símplice,  $\partial A$  es una  $(n-1)$ -cadena simplicial, homeomorfa a  $\mathbb{S}^{n-1}$  y cualquier aplicación de reverso  $f$  se restringe a la función  $\partial A \longrightarrow \partial A$  sin puntos fijos, por lo que  $f$  induce la aplicación identidad en  $H_{n-1}(\partial A) \cong \mathbb{Z}_2$ .

Mirando a  $\partial A$  como el representante de la clase de homología que genera  $H_{n-1}(\partial A)$ , podemos concluir que  $f_*(\partial A) = 1$ . Pero  $\partial A$  bordea  $\cap A_i$ , por lo que representa  $\gamma_{\cap A_i}$ . Por tanto, concluimos que  $f_*(\gamma_{\cap A_i}) = 1$ , es decir,  $\deg(\cap A_i) = 1$ .  $\square$

Este lema nos indica que el grado de  $\cap A_i$  es impar, como queríamos ver.

Ahora retomamos nuestro objetivo principal de buscar un **cuadrilátero de tipo cuadrado** en el símplice  $Q$ . En el **Lema 4.33** vimos que si  $w$  es suave, cada cuadrilátero unipuntual está en un  $Q_i$  distinto. Ahora, probaremos el Problema del Cuadrado Inscrito para las curvas suaves, y lo haremos aplicando el método de reducción al absurdo:

**Teorema 4.42** Si  $w$  es una curva suave, entonces admite un cuadrilátero inscrito de lados iguales y diagonales iguales.

*Demostración:*

Sean  $Q$  y  $R$  y sus respectivos subconjuntos los previamente descritos. Supongamos que no existe ningún **cuadrilátero de tipo cuadrado** en  $Q$ . Esto implicaría que  $R_{DELGADO} \cap R_{GRUESO} = 0$ , por lo que  $R$  puede escribirse como una unión disjunta  $R = R_{DELGADO} \sqcup R_{GRUESO}$ .

La cara  $F_0$  es un símplice, y tiene un recubrimiento  $\{F_0 \cap Q_i\}$  de entornos cerrados de los vértices, con  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  (cada  $Q_i$  incluye  $v_i$ , por lo que podemos construir este recubrimiento con la familia de subconjuntos cerrados  $(F_0 \cap Q_1, F_0 \cap Q_2, F_0 \cap Q_3$  y  $F_0 \cap Q_4)$ ). Además  $R = \cap_i Q_i$ , por lo que obtenemos las siguientes igualdades:

$$\bigcap_i \{F_0 \cap Q_i\}_{i=1}^4 = F_0 \cap R \quad (4.2)$$

$$F_0 \cap R = (F_0 \cap R_{DELGADO}) \sqcup (F_0 \cap R_{GRUESO}) \quad (4.3)$$

Por **Lema 4.40** y **Lema 4.41**, se tiene

$$\deg(F_0 \cap R_{DELGADO}) + \deg(F_0 \cap R_{GRUESO}) = \deg(F_0 \cap R) = 1 \quad (4.4)$$

de lo que se puede deducir que:

$$\deg(F_0 \cap R_{DELGADO}) \neq \deg(F_0 \cap R_{GRUESO}) \quad (4.5)$$

Para probar el teorema, buscaremos ver que (4.5) da lugar a una contradicción, probando que los dos términos son iguales a  $\deg(F_4 \cap R_{DELGADO})$ .

Comenzamos probando que  $\deg(F_4 \cap R_{DELGADO}) = \deg(F_0 \cap R_{GRUESO})$ . Para ello, notemos que la aplicación  $h : F_0 \longrightarrow F_4$  previamente definida no es sólo un homeomorfismo de caras, sino también de los recubrimientos  $\{F_0 \cap Q_i\}$  y  $\{F_4 \cap Q_i\}$ .

Esta función aplica  $F_0 \cap R_{GRUESO}$  en  $F_4 \cap R_{DELGADO}$ , pues al llevar los cuadriláteros de  $F_0$  a  $F_4$  variando la numeración de los vértices, aplicará la mayor diagonal de los rombos de  $F_0 \cap R_{GRUESO}$  en la menor diagonal de los de  $F_4 \cap R_{DELGADO}$ . Por tanto:

$$\begin{aligned} \deg_{\{F_0 \cap Q_i\}}(F_0 \cap R_{GRUESO}) &= \deg_{\{F_4 \cap Q_i\}}(H(F_0 \cap R_{GRUESO})) \\ &= \deg_{\{F_4 \cap Q_i\}}(Q_4 \cap R_{DELGADO}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

lo que concluye la primera parte de la demostración

Procedemos ahora a probar que  $\deg(F_0 \cap R_{DELGADO}) = \deg(F_4 \cap R_{DELGADO})$ . Afirmamos que  $\deg(R_{DELGADO})$  es el mismo se mida en  $F_0$  o en  $F_4$ . De forma intuitiva puede suponerse cierto ya que el grado de  $R_{DELGADO}$  cambia de forma continua a medida que progresamos por  $Q$  desde la cara inferior hacia la superior, pero es necesario precisar esta idea con rigor:

Para ello, se construye la aplicación

$$\begin{aligned} f : (Q-R) &\longrightarrow \partial F_0 \\ x &\longmapsto \sum_{i=1}^4 \frac{d(x, Q_i)}{\sum_j d(x, Q_j)} v_i \end{aligned}$$

donde  $d(x, Q_i)$  es la distancia de  $x$  a  $Q_i$ . Vemos,  $f$  aplica cada  $Q_i$  en la cara  $F_0 \cap F_i$  de  $F_0$ , pues la imagen es una combinación lineal normalizada de los tres vértices restantes. Entonces  $f$  restringida a  $F_0$  es una aplicación de reverso para el recubrimiento  $\{F_0 \cap Q_i\}_{i=0}^4$ . Por otro lado, si restringimos  $f$  a  $F_4$  es isomorfa a la aplicación de revestimiento para  $\{F_4 \cap Q_i\}$  a través de la aplicación  $h$ .

Triangulamos  $Q$  de forma suficientemente fina para que ningún símlice toque  $R_{DELGADO}$  y  $R_{GRUESO}$  de forma simultánea, y sea

$$\Delta = \{x_1 \alpha_1 + \dots + x_m \alpha_m : \alpha_i \text{ es un 4-símlice; } \alpha_i \cap R_{DELGADO} \neq \emptyset; x_i \in \mathbb{Z}\}$$

la 4-cadena simplicial que consta de todos los símlices de la triangulación que intersecan  $R_{DELGADO}$ .

Sea ahora  $\partial \Delta$  una 3-cadena en  $(Q-R)$ , y

$$\Gamma = \{y_1 \beta_1 + \dots + y_r \beta_r : \beta_i \text{ es un 3-símlice; } \beta_i \subsetneq F_0; \beta_i \subsetneq F_4; y_i \in \mathbb{Z}\}$$

la 3-cadena compuesta de todos los símlices en  $\partial \Delta$  no contenidos en  $F_0$  ni en  $F_4$ .

Visualmente, puede considerarse en los casos simples a  $\Gamma$  como un tubo que cubre  $R_{DELGADO}$  y que conecta  $F_0$  con  $F_4$ , como se muestra en la imagen:

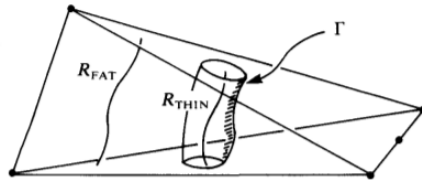


Figura 4.3: Cadena  $\Gamma$  en el símlice  $Q$

El borde  $\partial\Gamma$  es una 2-cadena simplicial que debe representar el elemento cero en  $H_2(Q - R)$ , pues  $\partial\Gamma$  es el borde del borde, por tanto cero aplicando **Lema 4.17**. Además,  $f_*(\partial\Gamma) = 0 \in H_2(F_0)$ .

Por otra parte,  $\partial\Gamma$  tiene dos componentes: una que rodea  $(R_{DELGADO} \cap F_0)$  en  $F_0$  y otra que rodea  $(R_{DELGADO} \cap F_4)$  en  $F_4$ . Tenemos así:

$$f_*(\partial\Gamma) = f_*(\partial\Gamma \cap F_0) + f_*(\partial\Gamma \cap F_4) = 0 \quad (4.7)$$

por lo que

$$f_*(\partial\Gamma) = f_*(\partial\Gamma \cap F_0) + f_*(\partial\Gamma \cap F_4) = 0 \quad (4.8)$$

Como vimos al definir el concepto de grado, el lado izquierdo de (4.5) mide el grado de  $(R_{DELGADO} \cap F_0)$  y el derecho el de  $(R_{DELGADO} \cap F_4)$ . Ambos grados son iguales, lo que contradice (4.5) y concluye por tanto nuestra demostración.  $\square$

Hemos probado así el Problema del Cuadrado Inscrito para las curvas suaves basándonos en **Lema 4.33** que satisfacen. A continuación, iremos un paso más allá se introducirá una nueva condición para las curvas que también garantiza la existencia del cuadrado inscrito.

### 4.3. Curvas localmente monótonas

En este apartado se introducirá una nueva hipótesis sobre las curvas para la que probar la existencia del cuadrado inscrito, y la llamaremos **Condición A**. Tal hipótesis es condición suficiente para el **Lema 4.35** y para asegurar la existencia de un cuadrado inscrito o de un *square-like quadrilateral*. Las curvas suaves lo satisfacen, así como los polígonos con todos sus ángulos obtusos.

**Definición 4.43** Siendo  $w$  una curva, llamamos **cuerda** a cualquier segmento que una dos puntos de  $w$ .

**Definición 4.44** Una curva  $w$  satisface la **Condición A** si cada punto  $w(y)$  de la curva admite un entorno  $U(y)$  en  $\mathbb{R}^n$  tal que no existen dos cuerdas perpendiculares contenidas en  $U(y)$ .

Esta definición es puramente geométrica, ya que sólo depende de la imagen de la curva  $w$  y no tiene en cuenta la parametrización.

Una definición equivalente es que se satisface **Condición A** si cada punto de  $w$  admite un entorno en  $w$  en el que cualesquiera dos cuerdas difieren en su dirección menos de  $90^\circ$  (considerando los ángulos según la orientación de la curva).

Siendo aún más precisos: si  $w$  satisface **Condición A**, cada  $y \in \mathbb{R}$  admite un entorno  $(y - \mu, y + \mu)$  tal que si  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in (y - \mu, y + \mu)$  (con  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ ), entonces:

$$(w(x_2) - w(x_1)) \cdot (w(x_4) - w(x_3)) > 0$$

donde  $\cdot$  denota el producto escalar.

La periodicidad de  $w$  nos permite elegir  $\mu \in \mathbb{R}$  de forma independiente a  $y$ .

A continuación, introduciremos la aplicación del **Lema 4.33** para las curvas que satisfacen Condición A. Si probamos que las curvas bajo esta condición satisfacen dicho lema, esto implicará que admiten un cuadrado inscrito, por el **Teorema 4.42**:

**Lema 4.45** Si  $w$  cumple **Condición A**, cada cuadrilátero unipuntual en  $Q$  está contenido en un único  $Q_i$ . En particular,  $v_i \in Q_i \forall i \in \{1, 2, 3\}$  y  $y \in Q_4$  para todo  $y$  que esté en el borde que conecta  $v_0$  y  $v_4$ .

*Demostración:*

Sea  $\mathbf{y}=(y, y, y, y)$  un cuadrilátero unipuntual sobre el borde de  $v_0$  a  $v_4$ . Debemos probar que  $\mathbf{y}$  admite un entorno  $U(\mathbf{y})$  en  $Q$  tal que para cualquier punto  $\mathbf{x}$  en dicho entorno que también esté en  $Q^0$ , el cuarto lado de  $\mathbf{x}$  es el único de mayor longitud. Esto implicará que  $\mathbf{y}$  está en  $Q_4$  pero no en el resto de  $Q_i$ .

El entorno de  $\mathbf{y}$  requerido consta de aquellos elementos de  $\mathbf{x} \in Q$  cuyas coordenadas  $x_1, x_2, x_3, x_4$  están en  $(y - \mu, y + \mu) \subset \mathbb{R}$ . Sea  $\mathbf{x}$  un elemento de este entorno que está también en  $Q^0$ . Tenemos además que  $0 < x_1 < \dots < x_4 < 1$ . Sean  $z_1, z_2, z_3, z_4$  vectores en  $\mathbb{R}^n$  que representan los lados del cuadrilátero  $\mathbf{x}$ . Tenemos

$$\begin{aligned} z_i &= w(x_{i+1}) - w(x_i), \forall i \in \{1, 2, 3\} \\ z_4 &= w(x_4) - w(x_1) \end{aligned}$$

Veremos que  $z_4$  es el lado de mayor longitud. Veamos, por ejemplo, que  $z_4 > z_2$ . Tenemos

$$\underbrace{w(x_2) - w(x_1)}_{z_1} + \underbrace{w(x_3) - w(x_2)}_{z_2} + \underbrace{w(x_4) - w(x_3)}_{z_3} = \underbrace{w(x_4) - w(x_1)}_{z_4}$$

es decir:

$$z_4 = z_1 + z_2 + z_3$$

y de esto se sigue

$$z_4 \cdot z_2 = z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_2 + z_3 \cdot z_2$$

y, como todos esos productos escalares son positivos por hipótesis de **Condición A**, tenemos

$$z_4 \cdot z_2 > z_2 \cdot z_2$$

lo que quiere decir que

$$\|z_4\| \|z_2\| \underbrace{\cos \widehat{z_4 z_2}}_{\leq 1} > \|z_2\|^2 \implies \|z_4\| > \|z_2\|$$

por lo que el cuarto lado es estrictamente mayor que el segundo. De forma similar, el cuarto lado es mayor que el primero y el tercero. De aquí se deduce que  $\mathbf{x} \in Q_4$  y no en ningún otro  $Q_i$ . Entonces, si esto es cierto para todo  $\mathbf{x} \in Q^0$  suficientemente próximo a  $\mathbf{y}$ , es cierto también para  $\mathbf{y}$ .

Esta demostración funciona para los vértices  $v_0$  y  $v_4$ . Con el resto de vértices se requiere mayor delicadeza pero el procedimiento es similar.

Como hemos mencionado, este lema nos permite ampliar el **Teorema 4.42** y establecer el siguiente enunciado:

**Teorema 4.46** Si  $w$  es una curva que satisface **Condición A**, entonces admite un cuadrilátero

inscrito de lados de igual longitud y diagonales de igual longitud. (un *cuadrilátero de tipo cuadrado*, o un cuadrado en  $\mathbb{R}^2$ ).

Por último, mostraremos el resultado más fuerte probado por Stromquist relativo al Problema del Cuadrado Inscrito, dando una condición de suavidad mucho menos restrictiva: **monotonía local**. Este concepto lo trabajó únicamente sobre  $\mathbb{R}^2$ . Como veremos, cumplen esta condición las curvas suaves, los polígonos curvos convexos, así como la mayoría de curvas  $C^1$  a trozos.

Empecemos definiendo esta condición de suavidad y todas las definiciones previas requeridas para su comprensión.

**Definición 4.47** Un **segmento** de una curva  $w$  correspondiente al intervalo  $(a,b)$  es la restricción de la función a dicho intervalo, y se denota por  $w|_{(a,b)}$ .

**Definición 4.48** Llamamos  $(b-a)$  a la **longitud** de dicho segmento, la cual se mide sobre el espacio paramétrico, y no sobre  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 4.49** Sea  $u$  un vector no nulo de  $\mathbb{R}^2$ . Un segmento se dice **monótono en la dirección de  $u$**  si el producto escalar  $w(x) \cdot u$  es una función de  $x$  estrictamente creciente, para  $x \in (a, b)$ . Esto es:

$$w(x) \cdot u > w(y) \cdot u \quad \forall x, y \in (a, b) : x > y$$

Ningún cuadrado inscrito en  $w$  puede inscribirse (al menos, ninguno cuyos vértices estén en igual orden cíclico en el cuadrado que en la curva) en un segmento monótono de  $w$ . Si los vértices del cuadrado estuvieran todos sobre un segmento monótono, esto implicaría que el propio cuadrado es monótono en una dirección dada, pero esto no es cierto.

**Definición 4.50** Una curva  $w$  es **localmente monótona** si,  $\forall y \in \mathbb{R}$ , existe un intervalo  $(y - \mu, y + \mu)$  y una dirección  $u(y)$  tal que  $w|_{(y-\mu, y+\mu)}$  es un segmento monótono en la dirección de  $u(y)$ .

Si  $w$  tiene esta propiedad, por la periodicidad de  $w$  y la compactitud de  $[0,1]$  podemos tomar el valor  $\mu$  constante y por tanto independiente de  $y$ . En este caso, cada segmento de  $w$  de longitud al menos  $2\mu$  es monótono en la misma dirección, y diríamos que  $w$  es **localmente monótona con constante  $\mu$** .

Como la monotonía local es una condición geométrica, daremos una definición más visual para ayudar a la comprensión por parte del lector:

**Definición 4.51** Una curva  $w$  es **localmente monótona** si todo punto  $w(y)$  de la curva admite un entorno  $U(y)$  en  $\mathbb{R}^2$ , y una dirección  $n(y)$  tal que ninguna cuerda de la curva puede al mismo tiempo estar contenido en  $U(y)$  y paralela a  $u(y)$ . La dirección  $n(y)$  es normal a la dirección  $u(y)$  de **Definición 4.50** y puede verse como un vector normal (aunque la curva no sea diferenciable).

Mostramos una figura que nos sirve como ejemplo ilustrativo de esta definición:

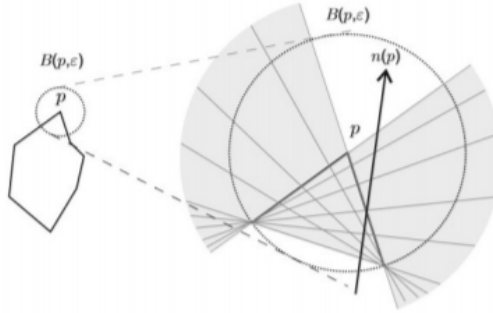


Figura 4.4: Curva localmente monótona

En este ejemplo, tomamos un punto  $p$  cualquiera de la curva  $w$ , y consideramos su entorno  $U(p)$  como la bola abierta  $B(p; \epsilon)$ . La zona sombreada representa el conjunto de rectas que contienen una cuerda en  $w \cap B(p; \epsilon)$ . Vemos que cualquier vector que atravesase la región sombreada podría ser nuestro  $n(p)$  buscado, verificándose que tal ninguna cuerda en  $B(p; \epsilon)$  puede ser paralela a nuestro  $n(p)$ .

Por el contrario, en la Figura 6 se muestra un ejemplo de una curva de Jordán no localmente monótona. Visualmente, apreciamos una espiral con infinitos giros. Tomando un punto  $p$  infinitamente céntrico en la espiral, sólo admitirá entornos  $U_i(p)$  de forma que la unión de todas las rectas que contienen cuerdas en  $w \cap U_i(p)$  cubrirá todo el plano, por lo que para cualquier  $u_i(p)$  en  $U_i(p)$  existirá una cuerda paralela. Esto es aplicable para cualquier  $i$ , por lo que no es posible verificar las condiciones de **Definición 4.51**.

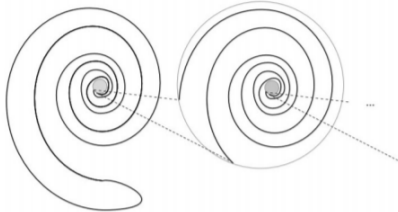


Figura 4.5: Curva no localmente monótona

Como se mencionó previamente, las curvas suaves, los polígonos convexos y la mayoría de curvas  $C^1$  a trozos son localmente monótonas. Procedemos a detallar esta idea:

- Para el caso de curvas suaves, sobre las que puede definirse el vector normal, basta tomar, para cada  $w(y)$ , el vector normal  $u(y)$ , y aplicando la **Definición 4.51** se deduce la monotonía local.
- En el caso de los polígonos curvos convexos, basta tomar, para cada punto  $y$ , como  $n(y)$  a la dirección de cualquier vector que conecte  $w(y)$  con un punto interior de la curva.
- Por último, queremos detallar qué tipo de curvas  $C^1$  a trozos son localmente monótonas. Decimos que una curva es  $C^1$  a trozos si existen valores  $x_0, \dots, x_k$  con



$0 = x_0 < \dots < x_k = 1$  tales que  $w$  tiene derivada continua no nula en cada intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , incluyendo las derivadas unidireccionales en los extremos, las cuales denotamos por  $w'_-(x_i)$  y  $w'_+(x_i)$ .

Se dice que la curva tiene una **cúspide** en  $x_i$  si esos dos vectores tienen direcciones opuestas, es decir, si  $w'_-(x_i)$  es un múltiplo negativo de  $w'_+(x_i)$ . Puede por tanto verse que una curva  $C^1$  a trozos sin cúspides es localmente monótona. Basta tomar como dirección  $u(x_i)$  cualquier combinación convexa de  $w'_+(x_i)$  y  $w'_-(x_i)$ .

Geométricamente, es posible observar por qué una curva  $C_1$  a trozos con cúspides no es localmente monótona. Esto se debe a que en los puntos cúspide la región sombreada mostrada anteriormente en las figuras cubre todo el plano, lo que hace imposible encontrar el  $n(p)$  deseado.

Habiendo explicado y ejemplificado la condición de monotonía local, se introduce el teorema definitivo que Stromquist introdujo, y la prueba del mismo:

**Teorema 4.52** Si  $w$  es una curva localmente monótona en  $\mathbb{R}^2$ , admite al menos un cuadrado inscrito.

*Demostración:*

Sea  $w$  la curva localmente monótona de constante  $\mu$ . Nuestra estrategia de demostración consistirá en aproximar  $w$  por curvas suaves  $w_\epsilon$ , sabiendo que cada una de las cuales posee un cuadrado inscrito, en virtud del **Teorema 4.42**. A medida que  $\epsilon \rightarrow 0$ , la subsucesión correspondiente de los cuadrados inscritos en los  $w_\epsilon$  converge a un cuadrado en  $w$ .

La dificultad nace en probar que tal cuadrado límite no tiene longitud de lado nula, es decir, que no es degenerado. Mostraremos previamente que cada  $w_\epsilon$  es localmente monótona de constante  $< \frac{1}{2}\mu$ , lo cual nos permitirá reducir la cota sobre los lados de los cuadrados inscritos en  $w_\epsilon$ .

Definimos con  $\|x\|$  el tamaño del elemento  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  de  $Q$  como

$$\|x\| = \min \{(x_4 - x_1), ((1 + x_3) - x_4), ((1 + x_2) - x_3), ((1 + x_1) - x_2)\}$$

Equivalentemente,  $\|x\|$  es la longitud del segmento más pequeño de la curva que contiene a  $w(x_1), w(x_2), w(x_3)$  y  $w(x_4)$ . Nótese que  $\|x\|$  está medido sobre el espacio paramétrico de la curva y no sobre la imagen de la misma en  $\mathbb{R}^2$ , por lo que no está directamente relacionado con la longitud de los lados del cuadrilátero correspondiente u otras medidas en  $\mathbb{R}^2$ .

Sin embargo, los únicos cuadriláteros de longitud de lado nula son los unipuntuales y, como  $\|x\|$  es una función continua en  $Q$ , cualquier sucesión de cuadriláteros cuyos lados tengan una cota positiva menor no podrán converger a un cuadrilátero unipuntual.

Sea  $\epsilon > 0$  y elíjase un  $\delta > 0$  tal que  $|x - y| < \delta$  implique que  $\|w(x) - w(y)\| < \epsilon$ . Definamos  $w_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por:

$$w_\epsilon(x) = \frac{1}{\delta} \int_{t=0}^{\delta} w(x+t) dt$$

Con esta construcción garantizamos que  $\|w_\epsilon(x) - w(x)\| < \epsilon$ , y  $w_\epsilon(x)$  tiene una derivada continua no nula:

$$w'_\epsilon = \frac{1}{\delta} (w(x+\delta) - w(x))$$

Usando la monotonía local supuesta para  $w$ , podemos asegurar que  $w_\epsilon$  es una curva suave, y por tanto, aplicando **Teorema 4.42**, tenemos un cuadrado inscrito  $S_\epsilon$  en  $w_\epsilon$ .

Vamos a ver que  $w_\epsilon$  es localmente monótona con constante  $\frac{1}{2}\mu$ : sea  $y \in \mathbb{R}$ , y  $u(y)$  la dirección tal que el segmento  $w|_{(y-\mu, y+\mu)}$  sea monótono en la dirección de  $u(y)$ . Sean  $x_1, x_2 \in (y - \frac{1}{2}\mu, y + \frac{1}{2}\mu)$  con  $x_1 < x_2$ . Se tiene de este modo:

$$(w_\epsilon(x_2) - w_\epsilon(x_1)) \cdot u(y) = \frac{1}{\delta} \int_{t=0}^{\delta} (w(x_2 + t) - w(x_1 + t)) \, dt \cdot u(y) > 0$$

pues hemos supuesto  $w$  monótona en la dirección de  $u(y)$ . Es decir, al ser  $w$  monótona, la integral resultante ha de ser estrictamente positiva. Se tiene así que la cuerda de  $w_\epsilon(x_1)$  a  $w_\epsilon(x_2)$  tiene una componente positiva en la dirección de  $u(y)$ , como se buscaba.

Por tanto, el cuadrado inscrito  $S_\epsilon$  en  $w_\epsilon$  no puede tener longitud de lado menor que  $\mu$ , pues en tal caso, sus vértices estarían contenidos en un intervalo de longitud  $\mu$ , en el que  $w_\epsilon$  debería ser monótona. Sin embargo, sabemos que un cuadrado no puede inscribirse en un segmento monótono de la curva.

Repitiendo este razonamiento para una sucesión de valores de  $\epsilon$  que tiendan a cero, alguno de los  $S_\epsilon$  convergerán a un cuadrado  $S$  de longitud al menos  $\mu$  (por lo que evitamos la degeneración) inscrito en  $w$ , lo que finaliza la demostración.  $\square$

## Capítulo 5

# Otras condiciones sobre la curva

En este capítulo del trabajo mostramos otros resultados ingeniosos relativos al Problema del Cuadrado Inscrito, relajando sensiblemente las condiciones de la curva del enunciado de la conjetura. [12]

### 5.1. Simetría respecto del origen

**Teorema 5.1** Toda curva de Jordan simétrica respecto del origen admite al menos un cuadrado inscrito.

*Demostración:*

Sea  $J$  una curva de Jordan simétrica respecto del origen, esto es, que verifica:

$$\forall P = (x, y) \in J, -P = (-x, -y) \in J$$

Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación que rota cada punto del plano  $90^\circ$  respecto del origen, en sentido opuesto a las agujas del reloj, como se ilustra en la imagen:

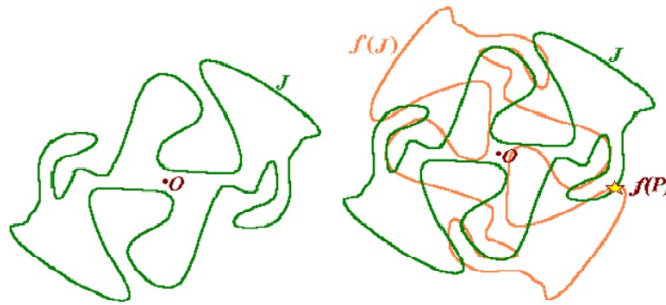


Figura 5.1: Rotación de la curva simétrica  $J$ .

En nuestra figura se observa que  $J$  y  $f(J)$  son dos curvas que intersecan. Hemos de probar que, para cualquier curva simétrica  $J$ ,  $J \cap f(J) \neq \emptyset$ . De hecho, por razonamiento de simetría, existen al menos dos puntos comunes:

Denotamos por  $P_{lejano}$  y  $P_{cercano}$  a los puntos de  $J$  a mayor y a menor distancia del origen  $O$ , respectivamente. Se tiene que  $f(P_{cercano})$  está a la misma distancia del origen que  $P_{cercano}$ , al tratarse  $f$  de una rotación y por tanto no alterar distancias. Análogamente,  $f(P_{lejano})$  está a igual distancia de  $O$  que  $P_{lejano}$ .

Sea  $A_1$  la circunferencia centrada en el origen que pasa por  $P_{cercano}$ . Obviamente,  $-P_{cercano} \in A_1$ , y todo punto de  $A_1$  está en  $J$  o en su interior, lo que es aplicable por tanto a  $f(P_{cercano})$ . Sea ahora  $A_2$  a circunferencia centrada en el origen que pasa por  $P_{lejano}$ , por tanto también por  $-P_{lejano}$ . Todo punto de  $A_2$  está en  $J$  o fuera de ella, lo que incluye lógicamente a  $f(P_{lejano})$ .

Esto nos da lugar a dos posibilidades:

- Si  $f(P_{cercano}) \in J$ , obviamente  $-f(P_{cercano}) \in J$ , por lo que ya tenemos al menos dos puntos en  $J \cap f(J)$ , como queríamos. Obviamente, lo mismo sucede si  $f(P_{lejano}) \in J$
- Si  $f(P_{cercano})$  está dentro de  $J$  y  $f(P_{lejano})$  está fuera, al ser  $f(J)$  una curva continua existirá algún punto  $P'$  que pase por  $J$ , lo que por simetría dará lugar a otro punto  $-P'$  también en  $J$ .

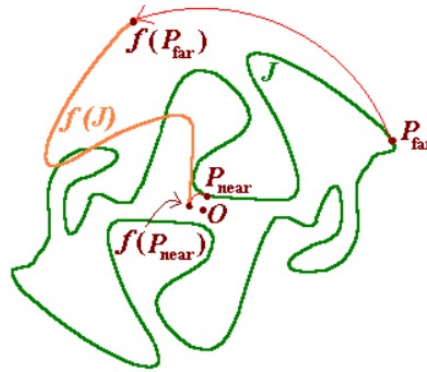


Figura 5.2

Ahora, basta considerar un punto  $P \in J \cap f(J)$ . Se deduce entonces que los puntos  $P, f(P), -P, f(-P)$  son los cuatro vértices de un cuadrado inscrito en la curva  $J$ : los cuatro puntos están en  $J$ , y por construcción de la función  $f$  se da que los segmentos que forma cada uno con su anterior y su posterior vértice difieren en ángulos de  $90^\circ$ , como se puede observar a continuación:

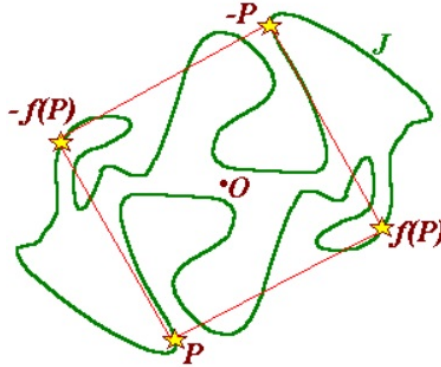


Figura 5.3: Cuadrado inscrito en  $J$ .

## 5.2. Simetría axial

A continuación, expondremos un nuevo resultado variando la condición de simetría y aportaremos una demostración más intuitiva que la anterior, introduciendo la técnica de *escalada de montaña* (“mountain climbing”):

**Teorema 5.2** Toda curva de Jordan simétrica respecto de una recta o eje dado admite al menos un cuadrado inscrito con dos lados paralelos al eje de simetría.

*Demostración:*

Sea  $J$  la curva dada, y  $L$  su eje de simetría. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que tal recta es horizontal. De hecho, podemos asumir que  $L$  es el eje horizontal si queremos.

Sean  $P$  y  $Q$  los dos puntos donde  $J$  y  $L$  intersecan. Su existencia se deduce por ser  $J$  cerrada, continua y simple. Sea también  $R$  el punto de  $J$  a mayor distancia de  $L$  (entiéndase como el punto de coordenada  $y$  más alta). Según la curva, es obvio que  $R$  puede no ser único.

La idea de la *escalada de montaña* consiste en imaginar los puntos  $P$  y  $Q$  como dos montañeros que parten de la base (la recta  $L$ ) y comienzan a escalar la montaña acercándose a la cima (el punto  $R$ ), manteniéndose siempre ambos a la misma altura. Sobre nuestro problema, debemos imaginar los puntos  $P$  y  $Q$  moviéndose de forma continua por la mitad superior de la curva  $J$ , de modo que la coordenada  $y$  de los puntos sea siempre la misma.

Al mismo tiempo, sus *reflejos* (puntos simétricos respectivamente a  $P$  y  $Q$  respecto de  $L$ ) se mueven en la parte inferior de la curva bajo las mismas condiciones, formándose siempre un rectángulo como se ilustra en la figura:

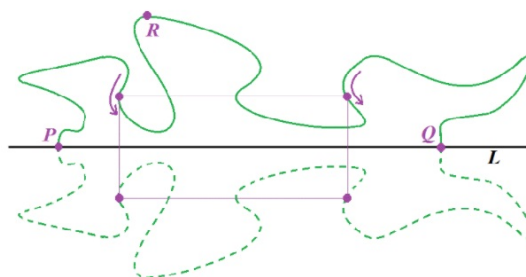


Figura 5.4

Podemos notar que, al principio, el rectángulo resultante será mas ancho que alto, y, al aproximarnos mucho a  $R$ , será mucho más alto que ancho. Por tanto, al moverse los puntos de forma continua, se puede deducir que en algún momento ese rectángulo ha debido ser un cuadrado.

Matemáticamente, se puede justificar la idea de la siguiente forma: consideramos dos funciones  $f, g : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tales que la función  $f$  asocia a cada momento del movimiento del rectángulo el valor de su lado horizontal, y, de igual modo,  $g$  nos lo asocia al valor del lado vertical.

En el momento 0, el rectángulo está reducido al segmento  $PQ$ , y en el momento  $t$  es un segmento que une  $R$  con su reflejado.

Sea ahora la función diferencia  $h(x) = f(x) - g(x)$ , que es continua por serlo  $f$  y  $g$ . Cuando  $x \rightarrow 0$ , el rectángulo es más ancho que alto, lo cual indica que  $h(x) > 0$ . Por el contrario, cuando  $x \rightarrow t$ , el rectángulo es más alto que ancho, es decir,  $h(x) < 0$ . De esta forma, y aplicando el **Teorema de Bolzano**, se tiene que  $h(x) = 0$  para algún  $x$ . Esto quiere decir que el rectángulo tiene sus cuatro lados iguales, lo que lo convierte en el cuadrado buscado.  $\square$

## Capítulo 6

# Problemas asociados: inscripción de otros polígonos

La Conjetura de Toeplitz, además del reto que suponía y supone por si mismo, propició la aparición de numerosos problemas asociados en los que la variante consistía en mantener la generalidad de la curva de Jordán, modificando el polígono a inscribir.

En este capítulo mostraremos en detalle algunos de esos problemas, explicando los diversos métodos de razonamiento empleados para afirmar los enunciados.

### 6.1. Problema del Rectángulo Inscrito

Una de las variantes más significativas de nuestro problema es la inscripción de un rectángulo en cualquier curva de Jordan. Fue probado por H.Vaughan en 1977 mediante un procedimiento puramente topológico de gran belleza, que describimos e ilustramos con detalle a continuación. [10] [12] [14].

**Teorema 6.1** Toda curva de Jordan  $J$  admite al menos un rectángulo inscrito en ella.

*Demostración:*

En primer lugar, nótese que dado un rectángulo cualquiera de vértices  $P Q' Q P'$ , las diagonales  $PQ$  y  $P'Q'$  tienen igual longitud, y se cruzan en su punto medio, llámese  $O$ . Equivalentemente, si existen cuatro puntos como los descritos tales que los segmentos  $PQ$  y  $P'Q'$  son de igual longitud, y se cruzan en el punto medio de ambos, los cuatro vértices necesariamente forman un rectángulo. Teniendo en cuenta esto, nuestro enfoque en la demostración serán los pares de puntos de la curva  $J$ . Es decir, el objetivo es claro: buscar dos pares de puntos distintos en la  $J$  tales que los segmentos respectivos que los unen midan lo mismo y coincidan en el punto medio de cada segmento.

Por otro lado, nuestra curva de Jordan  $J$  es siempre parametrizable, es decir, cada punto  $P = (x, y) \in J$  puede caracterizarse a través de las coordenadas cartesianas  $x(t)$  e  $y(t)$ , donde  $t \in [0, 1]$  y  $x(t)$ ,  $y(t)$  son las funciones paramétricas de la curva. Al tratarse de una curva cerrada, se da que:

$$x(0) = x(1) \quad \wedge \quad y(0) = y(1)$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la longitud de la curva siempre es igual a 1, midiendo sobre el espacio paramétrico.

A continuación, definimos una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que a cada par de puntos  $\{P, Q\}$  de  $J$  les asigna un punto  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  del siguiente modo: las dos primeras coordenadas,  $x$  e  $y$ , serán las del punto medio del segmento que une  $P$  y  $Q$ , mientras que la coordenada  $z$  será la longitud de tal segmento (véase la Figura 11).

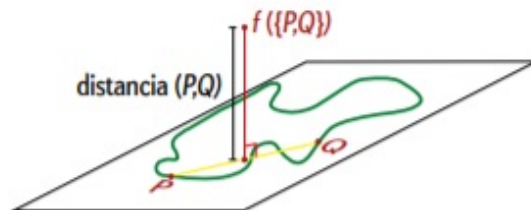


Figura 6.1: Representación de la función  $f$

De esta forma, el grafo de la función da lugar a una superficie en el espacio, llámese  $S$ . La función  $f$  es continua, y pequeños desplazamientos sobre  $P$  o  $Q$  implican pequeños desplazamientos sobre la superficie. A medida que acercamos entre sí  $P$  y  $Q$ , el punto  $f(P, Q)$  se aproxima a la curva, y si  $P = (x, y)$  tenemos  $f(P, P) = (x, y, 0) \in J$ .

El proceso de demostración se basa en encontrar una superficie topológica que represente de forma natural el conjunto de pares de puntos de la curva. Pero esta cuestión da lugar a dos enfoques: pares ordenados y pares desordenados.

Comenzamos considerando los pares ordenados es decir,  $(P, Q) \neq (Q, P)$ ,  $\forall P, Q \in J$ .

Tratamos de establecer un homeomorfismo entre el conjunto de pares de puntos de nuestra curva y los puntos del cuadrado unidad  $I \times I = [0, 1] \times [0, 1]$ . Para ello, si  $P$  tiene coordenadas  $(x(t), y(t))$  y  $Q$  tiene coordenadas  $(x(t'), y(t'))$ , el par  $(P, Q)$  se asocia al punto  $(t, t') \in I \times I$ .

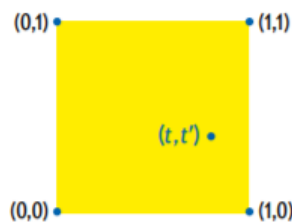


Figura 6.2

Sin embargo, es fundamental tener en cuenta lo siguiente: al ser la curva cerrada, los pares de puntos de la forma  $(0, t)$  (borde izquierdo) coinciden con los de la forma  $(1, t)$ . Lo mismo sucede con los puntos  $(t, 0)$  (borde inferior) y los  $(t, 1)$  (borde superior). Así, dichos bordes se identifican dos a dos.



Vemos que esta identificación de puntos da lugar a un toro, como se ilustra en la siguiente figura:

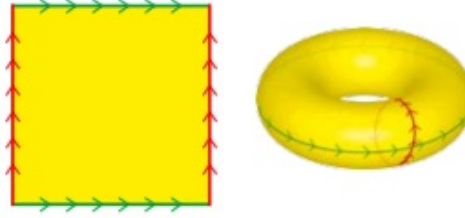


Figura 6.3

Se tiene de este modo que cada par de puntos  $(P, Q)$  de la curva da lugar a un único punto del toro, y viceversa. En definitiva, se tiene el homeomorfismo que buscamos.

Sin embargo, y volviendo a nuestro objetivo, considerar los pares ordenados nos lleva a que dos puntos cualesquiera  $P_1$  y  $Q_1$  dan lugar a dos pares distintos  $(P_1, Q_1)$  y  $(Q_1, P_1)$ , que a su vez generarían un rectángulo de dos puntos por lo expuesto previamente, pero obviamente nosotros, no buscamos triángulos triviales.

Ahora, cambiamos nuestro enfoque hacia la consideración de pares desordenados, es decir,  $\{P, Q\} = \{Q, P\}$ ,  $\forall P, Q \in P$ .

Desde el punto de vista del cuadrado unidad, esto implica que  $(t, t') = (t', t)$ ,  $\forall t \in I$ . Por tanto, podemos identificar los puntos dos a dos, reduciendo el cuadrado a la mitad, que ya contendría todos los pares no ordenados de puntos. Es decir, el conjunto de puntos no ordenados de la curva es topológicamente idéntico al triángulo que se ilustra a continuación:

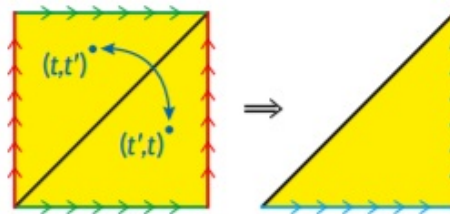


Figura 6.4

Ahora, al ser la curva cerrada y ser irrelevante el orden de los puntos, tenemos que  $(t, 0) = (0, t) = (1, t)$ , por lo hemos de identificar los bordes inferior y derecho según la orientación de las flechas, del siguiente modo:

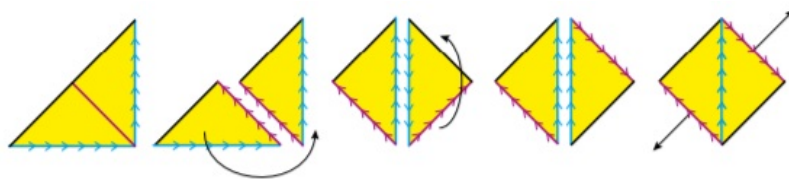


Figura 6.5

El resultado se corresponde con el diagrama de la cinta de Möbius, siendo el borde de la misma los puntos de la forma  $(t, t)$  del cuadrado, o, equivalentemente, los puntos  $\{P, P\}$  de la curva. Por tanto, el conjunto de pares no ordenados  $\{P, Q\}$  de la curva  $J$  es homeomorfo a la cinta de Möbius.

Así, la función  $f$  previamente descrita puede verse como una función de la cinta de Möbius a la superficie  $S$  que definía  $f$ . Pero los pares  $\{P, P\}$  corresponden al borde de la cinta, y dichos puntos tocan la curva en la superficie  $S$ , como hemos visto. Por continuidad,  $f$  aplica el borde de la cinta sobre la curva  $J$ .

Al autointersecarse el borde de la cinta de Möbius, es imposible aplicarlo sobre una curva cerrada plana sin que varios puntos distintos de la cinta (pares de puntos de  $J$ ) se toquen. Cuando esto suceda,  $f$  aplicará esos dos pares, llamémoslos  $\{P, Q\}$  y  $\{P', Q'\}$ , en el mismo punto  $(x, y, z)$ , lo que indica que esos cuatro puntos forman un rectángulo inscrito en  $J$ .  $\square$

## 6.2. Inscripción de triángulos en curvas de Jordan

**Teorema 6.2** Siendo  $J$  una curva de Jordan y  $T$  un triángulo cualquiera, entonces  $J$  admite un triángulo inscrito semejante a  $T$ . [12] [13]

*Demostración:*

Sea  $J$  nuestra curva de Jordan, y consideramos una circunferencia en el interior de  $J$ , que movemos en alguna dirección (la menor posible), hasta que toque la curva.

Sea  $X$  un punto de intersección de  $S$  con  $J$  (puede haber más puntos). Definimos los puntos  $Y$  y  $Z$  sobre  $S$  de forma que  $XYZ$  sea un triángulo semejante a  $T$  (asumiendo que para cualquier triángulo  $T$  es posible inscribir en cualquier circunferencia un triángulo semejante). Esto se puede hacer de varias formas, pero buscamos por conveniencia que  $YZ$  sea el lado del triángulo de mayor longitud.

Ahora, manteniendo  $X$  fijo, movemos  $Y$  y  $Z$  simultáneamente, alejándolos de  $X$  pero de tal forma que  $XYZ$  sea semejante a  $T$  en todo momento. El desplazamiento se detiene cuando uno de los dos puntos toca  $J$ .

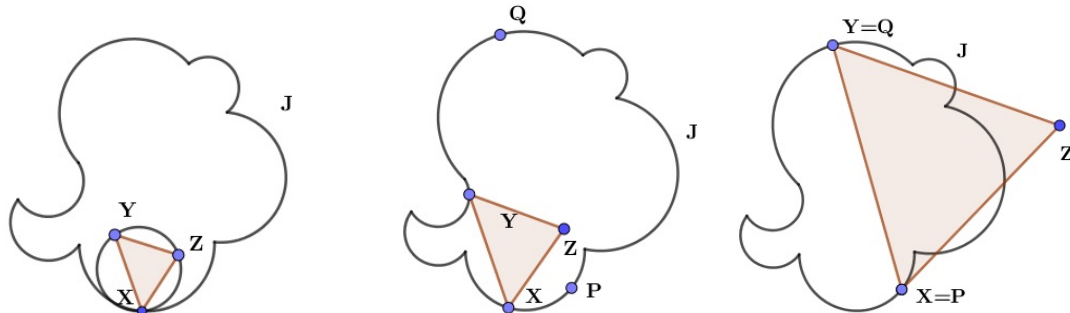
Si en ese momento tanto  $Y$  como  $Z$  tocan  $J$ , se daría por concluida la construcción (pues  $XYZ$  sería un triángulo inscrito en  $J$ ).

Supongamos que sólo uno de los dos puntos toca  $J$ , digamos que es  $Y$ . Es decir, tenemos a  $X$  e  $Y$  sobre la curva, pero  $Z$  aún dentro de ella.

En el siguiente paso, elegimos dos puntos  $P, Q \in J$  tales que la distancia entre ellos es la máxima posible entre puntos de  $J$ . Movemos  $X$  a lo largo de la curva hacia  $P$ , y al mismo

tiempo movemos  $Z$  buscando mantener siempre la semejanza de  $XYZ$  con  $T$ . Una vez se llega a que  $X = P$ , movemos  $Y$  sobre la curva hacia  $Q$ , desplazando igualmente  $Z$  para mantener la semejanza.

Una vez que  $Y = Q$ , tenemos que la distancia entre  $X$  e  $Y$  es igual que la máxima distancia entre puntos de  $J$ . Además, como supusimos que  $YZ$  es un lado mayor o igual que  $XY$ , se tiene que  $Z$  está fuera de la curva.



Como estos movimientos los hemos realizado gradualmente y manteniendo siempre la semejanza entre  $XYZ$  y  $T$ , es obvio que en algún momento  $Z$  ha debido tocar  $J$ . En ese instante se obtiene el triángulo  $XYZ$  similar a  $T$  con sus tres vértices sobre  $J$ .  $\square$

Este resultado nos muestra la existencia de un triángulo inscrito similar a  $T$  en  $J$ , pero no nos muestra, sin realizar los movimientos explicados, dónde podría encontrarse el triángulo buscado. Sin embargo, a continuación mostraremos un resultado que nos indica que, partiendo del punto de la curva que se quiera, estaremos tan cerca como queramos de un vértice del triángulo buscado.

**Teorema 6.3** Sea  $J$  una curva de Jordan cualquiera,  $T$  un triángulo cualquiera, y  $V$  el conjunto de puntos de  $J$  que son vértices de algún triángulo inscrito en  $J$  y semejante a  $T$ . Entonces,  $V$  es denso en  $J$ .

Este resultado equivale a afirmar que existen puntos en  $V$  arbitrariamente cercanos a cualquier punto dado de  $J$ .

*Demostración de Teorema 6.3:*

Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  los vértices del triángulo  $T$ , y  $P \in J$  un punto cualquiera. Se define una función

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

que funciona del siguiente modo:

- $f(P) = P$
- Si  $Q \neq P$ , entonces  $f(Q)$  es el punto tal que el triángulo de vértices  $P$ ,  $Q$  y  $f(Q)$  es semejante a  $T$ , con  $P$  el vértice correspondiente a  $A$ ,  $Q$  a  $B$ , y  $f(Q)$  a  $C$ .

Vemos que la función  $f$  equivale a una rotación respecto de  $P$  seguida de una homotecia (que se aleja o se acerca a  $P$ ). La imagen de la curva,  $f(J)$ , es otra curva que también pasa por  $P$ , como se ejemplifica en la imagen.

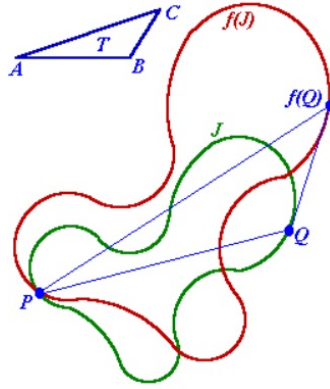


Figura 6.6: Curva  $J$  y su imagen  $f(J)$

Si  $f(J)$  y  $J$  intersecan en  $P$  se deduce una parte de  $f(J)$  está en el interior de  $J$  y la otra se encuentra fuera de  $J$ . Por tanto, deben existir más puntos de intersección. Esto implica existe un punto  $f(R) \in f(J)$  con  $f(R) \in J$ . De este modo, y por definición de  $f$ , los puntos  $P$ ,  $R$  y  $f(R)$  forman un triángulo en  $J$  semejante a  $T$ .

Por tanto, cualquier punto  $P \in J$  que sea “suficientemente bueno” como para que las curvas  $J$  y  $f(J)$  intersequen en más de un punto nos garantiza ser vértice de un triángulo inscrito en  $J$  semejante a  $T$ . Existe un argumento topológico (que excede el contenido de este trabajo) que prueba que ese conjunto de posibles puntos  $P$  es denso en  $J$ , es decir, siempre existe un punto “suficientemente bueno” tan cerca como se quiera de cualquier punto de  $J$ .

# Bibliografía

- [1] B. Matschke *A Survey on the Square Peg Problem*, Notices of the AMS, Vol.61, No. 4, 2012
- [2] É. Ghys, *Une carré dans une courbe*, página web: <https://images.math.cnrs.fr/Un-carre-dans-une-courbe.html>
- [3] I. Pak, *The Discrete Square Peg Problem*, arXiv:0804.0657v1 [math.MG], 4 Abril 2008
- [4] A. Emch, *Some Properties of Closed Convex Curves in a Plane*, American Journal of Mathematics, Vol.35, No.4 (Octubre 2013), 407-412 .
- [5] A. Emch, *On the Medians of a Closed Convex Polygon*, American Journal of Mathematics, Vol.37 (1915), 19-28
- [6] I. Llerena, *Los grupos de homotopía y de homología*, página web: <http://topologiaparausuarios.es/GruposHH/GHH3-HomologiaSimplicial.html>
- [7] Nuria Corral Pérez: *Apuntes de Topología Algebraica*. Universidad de Cantabria.
- [8] E. Gabriel, *Notas de Topología Algebraica*, Departamento de Matemática, Universidad de Buenos Aires.
- [9] W. Stromquist, *Inscribed Squares and Square-Like Quadrilaterals in Closed Curves*, Mathematika, Vol.36, Parte 2, No.72 (1989).
- [10] B. Luque, *El Problema del Cuadrado Inscrito en una Curva*, Investigación y Ciencia, Octubre 2017.
- [11] R. Fenn, *The Table Theorem*, Bull. London Math. Soc 2 (1970), 73-76
- [12] M. Nielsen, *Figures Inscribed in Curves (a short tour of and old problem)*, página web: <https://www.webpages.uidaho.edu/markn/squares/>
- [13] M. D. Meyerson, *Equilateral Triangles and Continuous Curves*, Fundamenta Mathematicae 110 (1980), 1-9
- [14] G. Sanderson *Who cares about topology? (Inscribed Square Problem)*. Accesible en: <https://www.youtube.com/watch?v=AmgkSdhK4K8>